

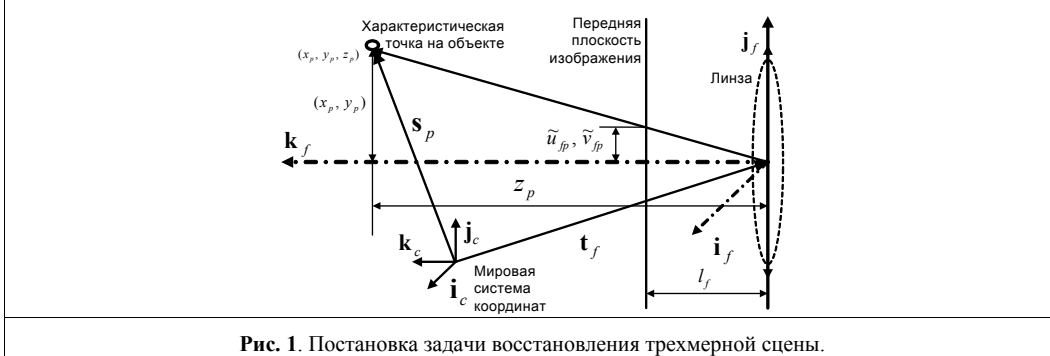
## О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ

### Аннотация

В данной работе.

### Уравнения для камеры обскуры (pinhole camera).

Определим обозначения, которые будут использоваться далее в данной работе.



**Рис. 1.** Постановка задачи восстановления трехмерной сцены.

Пусть имеется  $f = 1..F$  изображений трехмерной сцены, полученных с различных камер, имеющих неизвестное пространственное положение  $\vec{t}_f$  в мировой системе координат (МСК). Будем считать, что на трехмерной сцене выделено  $p = 1..P$  характеристических точек с координатами  $\vec{s}_p$  в МСК,  $\tilde{u}_{fp}, \tilde{v}_{fp}$  - их координаты на передней плоскости изображения (ППИ) в единицах длины. Тогда, из подобия треугольников (см. рис. 2) можно записать формулы для перспективной проекции [1,2]:

$$u_{fp} = g_f \frac{\mathbf{i}_f(\mathbf{s}_p - \mathbf{t}_f)}{\mathbf{k}_f(\mathbf{s}_p - \mathbf{t}_f)}, \quad v_{fp} = g_f \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{s}_p - \mathbf{t}_f)}{\mathbf{k}_f(\mathbf{s}_p - \mathbf{t}_f)}, \quad (1)$$

где  $g_f = \frac{l_f}{\tilde{u}_f^e N}$ ,  $u_{fp} = \frac{\tilde{u}_{fp}}{\tilde{u}_f^e N}$ ,  $v_{fp} = \frac{\tilde{v}_{fp}}{\tilde{u}_f^e N}$ ,

Здесь  $\vec{i}_f, \vec{j}_f, \vec{k}_f$  - правая тройка ортонормированных векторов, задающих систему координат, связанную с  $f$ -ой камерой (КСК), вектор  $\vec{k}_f$  направлен на объект, а  $\vec{i}_f, \vec{j}_f$  лежат в плоскости изображения;  $l_f$  - фокусное расстояние камеры в единицах длины.  $\tilde{u}_f^e$  - размер одного пикселя на фоточувствительной матрице в единицах длины;  $N$  - ширина изображения в пикселях. Безразмерные величины  $g_f, u_{fp}, v_{fp} \in [-1/2, 1/2]$  соответствуют величинам в единицах длины  $l_f, \tilde{u}_{fp}, \tilde{v}_{fp}$ .

Уравнения (1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_{fp} u_{fp} &= g_f \mathbf{i}_f(\mathbf{s}_p - \mathbf{t}_f) \\ \lambda_{fp} v_{fp} &= \alpha g_f \mathbf{j}_f(\mathbf{s}_p - \mathbf{t}_f) , \\ \lambda_{fp} &= \mathbf{k}_f(\mathbf{s}_p - \mathbf{t}_f) \end{aligned} \quad (2)$$

Где также предполагается, что размер пикселя на фоточувствительной матрице в единицах длины различен по оси x и y  $\tilde{u}_f^e \neq \tilde{v}_f^e$  и вводится aspect ratio:  $\alpha = \tilde{v}_f^e / \tilde{u}_f^e$ .

Введем матрицы:

$$\mathbf{K}_f = \begin{pmatrix} g_f & 0 & 0 \\ 0 & \alpha g_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{R}_f = (\mathbf{i}_f \quad \mathbf{j}_f \quad \mathbf{k}_f)^T$$

и векторы

$$\bar{\mathbf{u}}_{fp} = (u_{fp} \quad v_{fp} \quad 1)^T \quad (4)$$

$$\mathbf{S}_p = (\mathbf{s}_p | 1)^T$$

Такие векторы  $\bar{\mathbf{u}}_{fp} \in \mathfrak{R}^3$  и  $\mathbf{S}_p \in \mathfrak{R}^4$  называются *однородными координатами*.

Тогда

$$\mathbf{K}_f \cdot \mathbf{R}_f = \begin{pmatrix} g_f & 0 & 0 \\ 0 & \alpha g_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{i}_f \quad \mathbf{j}_f \quad \mathbf{k}_f)^T = \begin{pmatrix} g_f & 0 & 0 \\ 0 & \alpha g_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_f^T \\ \mathbf{j}_f^T \\ \mathbf{k}_f^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_f \mathbf{i}_f^T \\ \alpha g_f \mathbf{j}_f^T \\ \mathbf{k}_f^T \end{pmatrix} =$$

$$= (g_f \mathbf{i}_f \quad \alpha g_f \mathbf{j}_f \quad \mathbf{k}_f)^T$$

и уравнения (2) можно записать в виде

$$\lambda_{fp} \bar{\mathbf{u}}_{fp} = \mathbf{K}_f \cdot \mathbf{R}_f \cdot (\mathbf{s}_p - \mathbf{t}_f) = \mathbf{K}_f \cdot (\mathbf{R}_f | -\mathbf{R}_f \cdot \mathbf{t}_f) \cdot \mathbf{S}_p, \quad (5)$$

и, вводя обозначение для матриц:

$$\mathbf{P}_f = (\mathbf{R}_f | -\mathbf{R}_f \cdot \mathbf{t}_f) \quad , \quad \mathbf{P}_f \in \mathfrak{R}^{3 \times 4}$$

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{K}_f \cdot \mathbf{P}_f = (\mathbf{K}_f \mathbf{R}_f | -\mathbf{K}_f \cdot \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{t}_f) = (\mathbf{Q}_f | \bar{\mathbf{q}}_f) \quad , \quad \mathbf{Q}_f \in \mathfrak{R}^{3 \times 4} \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}_f = \mathbf{K}_f \mathbf{R}_f \quad , \quad \mathbf{Q}_f \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$$

$$\bar{\mathbf{q}}_f = -\mathbf{K}_f \cdot \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{t}_f \quad , \quad \bar{\mathbf{q}}_f \in \mathfrak{R}^3$$

окончательно

$$\lambda_{fp} \bar{\mathbf{u}}_{fp} = \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{S}_p \quad (7)$$

Это уравнения (1) в *однородных координатах*.

Часто пишут

$$\bar{\mathbf{u}}_{fp} \sim \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{S}_p, \quad (8)$$

Что надо понимать как «равно с точностью до множителя». Это разумно, так как уравнения (1) задают изображение не точки трехмерного пространства, а любой точки трехмерного пространства, лежащей на луче «центр линзы» - «характеристическая точка на объекте» (см. рис.1). В этом смысле вектор в однородных координатах на плоскости изображения  $\bar{\mathbf{u}}_{fp} \in \mathfrak{R}^3$  можно интерпретировать как множество (или одну из) точек трехмерного евклидова пространства, лежащих на этом луче. Однако в дальнейшем будет использоваться форма уравнений (7), чтобы подчеркнуть, какая именно константа, и не терять «несущественных» постоянных множителей.

Уравнения (7) получены в ряде предположений, а именно предполагалось что сетка пикселей на матрице прямоугольная, начало координат в плоскости изображения (на сетке пикселей) точно совпадает с пересечением плоскости изображения с оптической осью камеры и в предположении отсутствия сферических искажений объектива (бочка).

## Фундаментальная матрица

Следуя [3,4] запишем уравнения (7) используя обозначения (6)

$$\lambda_{fp} \bar{\mathbf{u}}_{fp} = (\mathbf{Q}_f | \bar{\mathbf{q}}_f) \cdot \mathbf{S}_p = \mathbf{Q}_f \cdot \bar{\mathbf{s}}_p + \bar{\mathbf{q}}_f \quad (9)$$

Пусть изображения трехмерных точек получены с двух камер, тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_{1p} \bar{\mathbf{u}}_{1p} &= \mathbf{Q}_1 \cdot \bar{\mathbf{s}}_p + \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \lambda_{2p} \bar{\mathbf{u}}_{2p} &= \mathbf{Q}_2 \cdot \bar{\mathbf{s}}_p + \bar{\mathbf{q}}_2 \end{aligned} \quad (10)$$

Так как матрицы  $\mathbf{Q}_f = \mathbf{K}_f \mathbf{R}_f$ ,  $\mathbf{Q}_f \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  невырожденные (3), то можно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1^{-1} \cdot (\lambda_{1p} \bar{\mathbf{u}}_{1p} - \bar{\mathbf{q}}_1) &= \mathbf{Q}_1^{-1} \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \bar{\mathbf{s}}_p \\ \mathbf{Q}_2^{-1} \cdot (\lambda_{2p} \bar{\mathbf{u}}_{2p} - \bar{\mathbf{q}}_2) &= \mathbf{Q}_2^{-1} \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \bar{\mathbf{s}}_p \end{aligned} \quad (11)$$

Откуда, убрав неизвестные трехмерные координаты точек, получим:

$$\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^{-1} \cdot (\lambda_{1p} \bar{\mathbf{u}}_{1p} - \bar{\mathbf{q}}_1) = (\lambda_{2p} \bar{\mathbf{u}}_{2p} - \bar{\mathbf{q}}_2), \quad (12)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{12} &= \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^{-1} \\ \mathbf{p}_{21} &= \bar{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{H}_{12} \bar{\mathbf{q}}_1, \\ \mathbf{n}_{2p} &= -\mathbf{H}_{12} \bar{\mathbf{u}}_{1p} \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (12) принимают вид:

$$\lambda_{2p} \bar{\mathbf{u}}_{2p} + \lambda_{1p} \bar{\mathbf{n}}_{2p} = \mathbf{p}_{21}, \quad (14)$$

Для любого  $p$  - это система трех уравнений, поэтому после исключения неизвестных параметров  $\lambda_{fp}$  должно остаться одно уравнение. Это будет сделано ниже двумя способами: первый делает более понятным для плохо подготовленного читателя, что откуда берется и почему, второй – методом решения векторного уравнения компактнее и без использования операций деления, каждая из которых порождает вопрос о равенстве знаменателя нулю.

## Первый способ

Решаем уравнение

$$\lambda_2 \bar{\mathbf{u}} + \lambda_1 \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{p}}, \quad (15)$$

Распишем покомпонентно:

$$\begin{cases} \lambda_2 u_1 + \lambda_1 n_1 = p_1 \\ \lambda_2 u_2 + \lambda_1 n_2 = p_2 \\ \lambda_2 u_3 + \lambda_1 n_3 = p_3 \end{cases},$$

Из первых двух уравнений имеем:

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & n_1 \\ p_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & n_1 \\ u_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{p_1 n_2 - p_2 n_1}{u_1 n_2 - u_2 n_1}, \quad \lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & p_1 \\ u_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & n_1 \\ u_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{u_1 p_2 - u_2 p_1}{u_1 n_2 - u_2 n_1},$$

и, подставляя в третье уравнение, получим:

$$\frac{p_1 n_2 - p_2 n_1}{u_1 n_2 - u_2 n_1} u_3 + \frac{u_1 p_2 - u_2 p_1}{u_1 n_2 - u_2 n_1} n_3 - p_3 = 0.$$

Умножая обе стороны на знаменатель и приводя подобные члены, а так же замечая сходство с детерминантом, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} (p_1 n_2 - p_2 n_1) u_3 + (u_1 p_2 - u_2 p_1) n_3 - p_3 (u_1 n_2 - u_2 n_1) &= 0 \\ p_1 n_2 u_3 - p_2 n_1 u_3 + p_2 n_3 u_1 - p_1 n_3 u_2 - p_3 n_2 u_1 + p_3 n_1 u_2 &= \\ p_1 n_2 u_3 + p_2 n_3 u_1 + p_3 n_1 u_2 - p_1 n_3 u_2 - p_2 n_1 u_3 - p_3 n_2 u_1 &= \\ \sum_{ijk} e_{ijk} p_i n_j u_k = \begin{vmatrix} p_1 & n_1 & u_1 \\ p_1 & n_2 & u_2 \\ p_1 & n_3 & u_3 \end{vmatrix} = (\vec{p} \cdot [\vec{n} \times \vec{u}]) = (\vec{p}, \vec{n}, \vec{u}) &= 0 \end{aligned}$$

Здесь  $e_{ijk}$  - единичный антисимметричный тензор 3-ранга.

□

## Второй способ

Решаем уравнение

$$\lambda_2 \vec{u} + \lambda_1 \vec{n} = \vec{p}, \quad (15)$$

Домножим обе стороны скалярно на вектор, который одновременно ортогонален векторам  $\vec{u}$ ,  $\vec{n}$ :

$$(\lambda_2 \vec{u} + \lambda_1 \vec{n}) \cdot [\vec{u} \times \vec{n}] = \vec{p} \cdot [\vec{u} \times \vec{n}].$$

Тогда левая сторона уравнения зануляется и получаем

$$\vec{p} \cdot [\vec{u} \times \vec{n}] = (\vec{p}, \vec{n}, \vec{u}) = \det(\vec{p} \quad \vec{n} \quad \vec{u}) = 0. \quad (16)$$

□

Как особенно наглядно видно из второго способа, вывод теряет смысл, если обе стороны уравнения умножаются на нулевой вектор, т.е. если  $\vec{u}$ ,  $\vec{n}$  коллинеарны. Возвращаясь в (15) к обозначениям (14) и подставляя в (13) получим:

$$\vec{0} \neq \mathbf{u}_{2p} \times \mathbf{n}_{2p} = -\mathbf{u}_{2p} \times \mathbf{H}_{12} \vec{u}_{1p} = -\mathbf{u}_{2p} \times \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^{-1} \vec{u}_{1p}. \quad (17)$$

Возвращаясь от обозначений (15) к обозначениям (14) получаем уравнение:

$$\vec{p}_{21} \cdot [\vec{u}_{2p} \times \vec{n}_{2p}] = 0. \quad (18)$$

Подставляя в него обозначения из (13) можно записать:

$$-\vec{p}_{21} \cdot [\vec{u}_{2p} \times \mathbf{H}_{12} \vec{u}_{1p}] = 0, \quad (19)$$

Распишем (19) покомпонентно:

$$\begin{aligned} -\sum_{ijk} e_{ijk} (p_{21})_i (u_{2p})_j (H_{12})_{kl} (u_{1p})_l &= \sum_{jl} (u_{2p})_j \left( -\sum_{ik} e_{ijk} (p_{21})_i (H_{12})_{kl} \right) (u_{1p})_l \\ &= \sum_{jl} (u_{2p})_j F_{jl} (u_{1p})_l = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Итого, *основное уравнение эпполярной геометрии* имеет вид

$$\vec{u}_{2p} \mathbf{F} \vec{u}_{1p} = 0, \quad (21)$$

Где  $F$  – *фундаментальная матрица*.

$$F_{jl} = -\sum_{ik} e_{ijk} (p_{21})_i (H_{12})_{kl} \quad (22)$$

Используя обозначения (a.14) , (a.15) , введенные в приложении А, соотношения (22) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{p}}_{21}]_x &= -\sum_i e_{ijk} (p_{21})_i \\ \mathbf{F} &= [\bar{\mathbf{p}}_{21}]_x \mathbf{H}_{12} \end{aligned} \quad (23)$$

и окончательно, *фундаментальная матрица* имеет вид:

$$\mathbf{F} = [\bar{\mathbf{p}}_{21}]_x \mathbf{H}_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -(p_{21})_3 & (p_{21})_2 \\ (p_{21})_3 & 0 & -(p_{21})_1 \\ -(p_{21})_2 & (p_{21})_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{H}_{12}$$

$$\det \mathbf{F} = 0 \quad (\text{см. (a.15)})$$

где

(23)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{12} &= \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^{-1} \\ \mathbf{Q}_f &= \mathbf{K}_f \mathbf{R}_f \\ \mathbf{p}_{21} &= \bar{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{H}_{12} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \bar{\mathbf{q}}_f &= -\mathbf{K}_f \cdot \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{t}_f \end{aligned}$$

см. (1)-(3).

### **Эпиполярная геометрия и фундаментальная матрица**

Основное уравнение эпиполярной геометрии (21) имеет вид

$$\bar{\mathbf{u}}_{2p} \mathbf{F} \bar{\mathbf{u}}_{1p} = 0, \quad \det \mathbf{F} = 0 \quad (24)$$

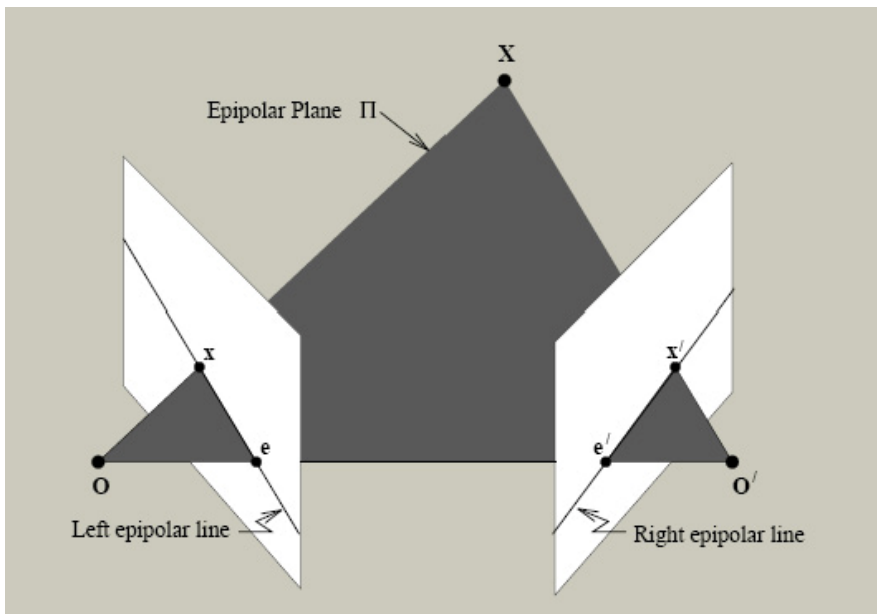
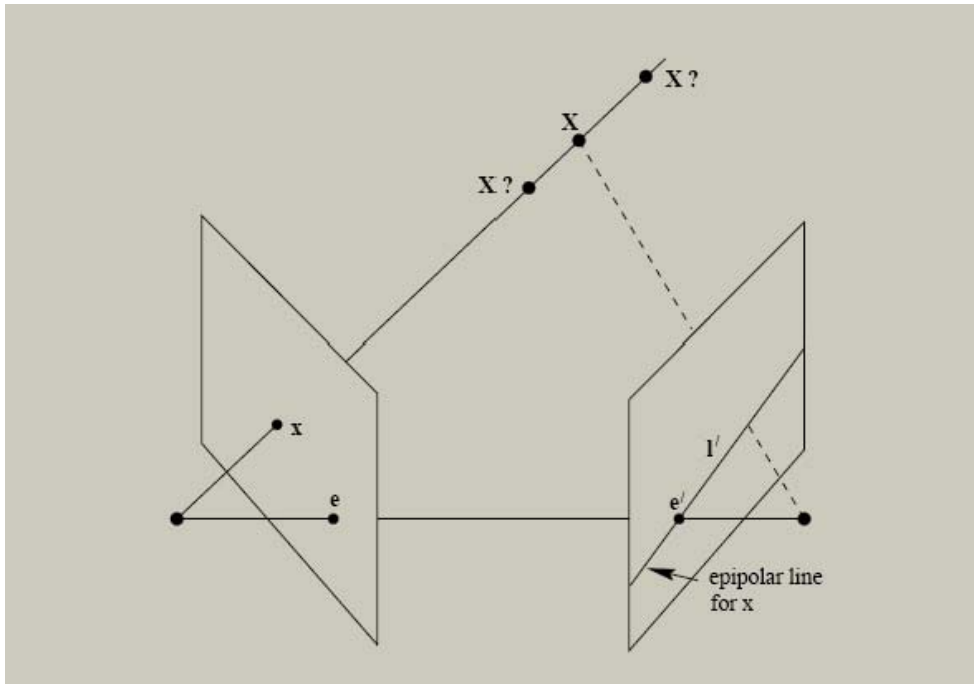
где фундаментальная задается выражениями (23). Удобно считать, что фундаментальная матрица определена с точностью до множителя, действительно, это ни как не влияет на уравнения (24). Таким образом фундаментальная матрица из 9 элементов имеет 7 независимых.

Уравнения (24) связывают однородные координаты изображений точки трехмерного мира на изображениях, полученных камерами 1 и 2 (естественно считается что изображения получены одновременно или трехмерная сцена не меняется во времени).

Пусть точка трехмерного мира имеет координаты на первом изображении  $\bar{\mathbf{u}}_{10} = (x_0, y_0, 1)$ , тогда,

обозначая  $\mathbf{F} \bar{\mathbf{u}}_{1p} = \bar{\mathbf{I}}$  получим, что на втором изображении, *какой бы ни была трехмерная сцена*,

координаты изображения точки будут подчиняться уравнению  $\bar{\mathbf{u}}_{2p}^T \cdot \bar{\mathbf{I}} = 0$ , а это - уравнение прямой на плоскости (изображения). Такая прямая называется эпиполярной линией.



### Заклучение

Данная работа является

## Приложение А. Единичный антисимметричный тензор.

В иностранной литературе называется «Levi-Civita symbol» см. [http://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita\\_symbol](http://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita_symbol).

Единичным антисимметричным тензором ранга  $k$  называется [5] матрица размерностью  $\underbrace{k \times k \times \dots \times k}_{k \text{ раз}}$ , компоненты которой могут принимать значения  $-1, 0, +1$ . Он обозначается  $e_{i_1 i_2 \dots i_k}$ , где  $i_j : \forall k, i_j = 1, 2, \dots, k$ .

По определению  $e_{12\dots k} = 1$ , перестановка любой пары индексов меняет знак компоненты тензора. Отсюда следует, что если хотя бы два индекса одинаковы – то значение компоненты тензора равно нулю.

В частности:

Тензор 1 ранга:  $e_i \equiv e_1 \equiv 1$

Тензор 2 ранга:  $e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Тензор 3 ранга:  $e_{ijk} : e_{123} = 1, e_{213} = -1, e_{231} = 1, e_{321} = -1, e_{312} = 1, e_{132} = -1$ . Остальные компоненты равны нулю.

Так как число перестановок из  $k$  элементов равно  $k!$ , то в общем случае число ненулевых компонент для единичного антисимметричного тензора ранга  $k$  равно  $k!$ . Очевидно, что количество ненулевых компонент  $k!$  меньше общего числа компонент  $k^k$ .

**В частном случае** тензора 3-го ранга, можно сформулировать правило: компонента равна нулю, если хотя бы два индекса имеют одинаковое значение, равна единице, если индексы образуют *циклическую перестановку* последовательности  $\{123\}$ , и  $-1$  в противном случае. **Для ранга выше 3, это правило НЕ применимо.**

При записи выражений с тензорами пользуются покомпонентной записью. Знак суммы  $\sum$  обычно опускают, подразумевая, что по каждой паре одинаковых индексов производится суммирование. Например, для тензоров  $a$  и  $b$  выражение  $a_{ijk} b_{ki}$  означает  $\sum_{ki} a_{ijk} b_{ki}$ . Такое написание не имеет какого-то глубокого смысла, а является просто удобной и общепринятой формой записи.

Единичные антисимметричные тензоры позволяют удобно записывать и работать с разнообразными формулами и выражениями, причем запись становится компактнее и понятнее. Рассмотрим некоторые свойства единичного антисимметричного тензора и приложения.

### 1. Детерминант (определитель матрицы)

Детерминант матрицы определяют либо рекурсивно через миноры подматриц, полученных вычеркиванием строк и столбцов [6] либо через элементы матрицы. Одно утверждение дается как определение, тогда второе – как теорема, которая доказывается на основе определения. Приведем фрагмент из 3.

«Мы будем называть перестановкой чисел  $1, \dots, n$  эти числа, написанные в каком-либо определенном порядке. Например из чисел  $1, 2$  можно образовать две перестановки:  $1, 2$  и  $2, 1$ . Произвольную перестановку чисел  $1, \dots, n$  мы обозначим  $i_1, i_2, \dots, i_n$ .

Будем говорить, что число  $i_n$  виновно в нарушении порядка в перестановке  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , если оно стоит левее меньшего числа. Например при  $n=4$  в перестановке  $2, 4, 3, 1$  числа  $2$  и  $3$  виновны каждое в одном нарушении порядка, число  $4$  – в двух. Итак общее число нарушений порядка в этой перестановке равно четырем. Число нарушений порядка в перестановке  $i_1, i_2, \dots, i_n$  мы обозначим  $N(i_1, i_2, \dots, i_n)$ .

Перестановка  $i_1, i_2, \dots, i_n$  называется четной, если  $N(i_1, i_2, \dots, i_n)$  – число четное, и нечетной в противном случае.

Тогда формула полного разложения для детерминанта имеет вид:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{N(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \quad (\text{a.1})$$

»

Но это же в точности соответствует определению единичного антисимметричного тензора ранга n ! Поэтому, формулу для вычисления детерминанта можно записать в виде:

$$\det(A) = \det(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n) = \sum_{i_1 \dots i_n} e_{i_1 \dots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \quad (\text{a.2})$$

Здесь  $\vec{a}_k$  - k-й вектор-столбец матрицы A,  $\vec{a}_{ki}$  - его  $i_n$ -я компонента. Суммирование здесь уже не по различным перестановкам  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , а по каждому индексу  $i_1, i_2, \dots, i_n$  в диапазоне  $i_k = 1 \dots n$ ,  $k = 1 \dots n$ .

Аналогичное представление имеет место и для векторов-строк матрицы.

В частности, для матриц 3x3 из векторов столбцов и векторов строк

$$\begin{aligned} A &= (\vec{a} \vec{b} \vec{c}), \quad \det A = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 e_{ijk} a_i b_j c_k \stackrel{def}{=} e_{ijk} a_i b_j c_k \\ B &= \begin{pmatrix} \vec{a}^T \\ \vec{b}^T \\ \vec{c}^T \end{pmatrix} = (\vec{a} \vec{b} \vec{c})^T = A^T, \quad \det B = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 e_{ijk} a_i b_j c_k \stackrel{def}{=} e_{ijk} a_i b_j c_k \end{aligned} \quad (\text{a.2})$$

## 2. Векторное произведение векторов:

$i$ -я компонента представляется в виде:

$$[a \times b]_i = e_{ijk} a_j b_k$$

## 3. Смешанное произведение векторов:

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]) = e_{ijk} a_i b_j c_k$$

## 4. Произведение (свертка) двух единичных антисимметричных тензоров третьего ранга.

Представление детерминанта (векторного и смешанного произведения векторов) с использованием единичного антисимметричного тензора кажется на первый взгляд не очень полезным. Однако это не так и все удобство этого аппарата проявляется в случае сложных выражений, в частности многократных векторных произведений. Для этого потребуются умение сворачивать (суммировать по паре индексов) произведение двух единичных антисимметричных тензоров [5]. Рассмотрим произведение

$$e_{ijk} e_{\alpha\beta\gamma}, \quad (\text{a.3})$$

Заметим, что конструкция в виде детерминанта матрицы из символов Кронекера удовлетворяет всем свойствам ЕАС:

$$e_{ijk} e_{\alpha\beta\gamma} = c \begin{vmatrix} \delta_{i\alpha} & \delta_{i\beta} & \delta_{i\gamma} \\ \delta_{j\alpha} & \delta_{j\beta} & \delta_{j\gamma} \\ \delta_{k\alpha} & \delta_{k\beta} & \delta_{k\gamma} \end{vmatrix}, \quad (\text{a.4})$$



Действительно, перестановка любой пары индексов, как в первом, так и во втором тензоре приводит к изменению знака, так как это эквивалентно перестановке строк матрицы. Появление пары одинаковых линий ведет к обнулению конструкции, так как в детерминанте появляются одинаковые строки или столбцы. Осталось только правильно подобрать константу, так, чтобы возможные значения были -1,0,1. Для этого выполним свертку по например первой паре индексов.

$$e_{ijk}e_{i\beta\gamma} = \sum_{i=1}^3 e_{ijk}e_{i\beta\gamma} = c \sum_{i=1}^3 \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{i\beta} & \delta_{i\gamma} \\ \delta_{ji} & \delta_{j\beta} & \delta_{j\gamma} \\ \delta_{ki} & \delta_{k\beta} & \delta_{k\gamma} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & \delta_{i\beta} & \delta_{i\gamma} \\ 0 & \delta_{j\beta} & \delta_{j\gamma} \\ 0 & \delta_{k\beta} & \delta_{k\gamma} \end{vmatrix} = c(\delta_{j\beta}\delta_{k\gamma} - \delta_{j\gamma}\delta_{k\beta}), \quad (\text{a.5})$$

Аналогично теперь по второй паре индексов:

$$e_{ijk}e_{ij\gamma} = c(\delta_{jj}\delta_{k\gamma} - \delta_{j\gamma}\delta_{kj}) = c(3\delta_{k\gamma} - \delta_{k\gamma}) = 2c\delta_{k\gamma}, \quad (\text{a.6})$$

И по третьей

$$e_{ijk}e_{ijk} = 2c\delta_{kk} = 6c, \quad (\text{a.7})$$

но

$$e_{ijk}e_{ijk} = \sum_{ijk} e_{ijk}^2 = \{\text{количество ненулевых элементов}\} = 3! = 6, \quad (\text{a.8})$$

Отсюда получаем  $c=1$  и окончательно следующие формулы:

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{\alpha\beta\gamma} &= \begin{vmatrix} \delta_{i\alpha} & \delta_{i\beta} & \delta_{i\gamma} \\ \delta_{j\alpha} & \delta_{j\beta} & \delta_{j\gamma} \\ \delta_{k\alpha} & \delta_{k\beta} & \delta_{k\gamma} \end{vmatrix} \\ e_{ijk}e_{i\beta\gamma} &= (\delta_{j\beta}\delta_{k\gamma} - \delta_{j\gamma}\delta_{k\beta}) \\ e_{ijk}e_{ij\gamma} &= 2\delta_{k\gamma} \\ e_{ijk}e_{ijk} &= 3! = 6 \end{aligned} \quad (\text{a.9})$$

**Пример (двойное векторное произведение:**

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}])_i &= e_{ijk} a_j e_{k\beta\gamma} b_\beta c_\gamma = e_{ijk} e_{k\beta\gamma} a_j b_\beta c_\gamma \stackrel{\substack{\text{четная} \\ \text{перестановка} \\ \text{индексов}}}{=} e_{kij} e_{k\beta\gamma} a_j b_\beta c_\gamma \stackrel{\substack{\text{по} \\ \text{формуле} \\ (\text{a.9})}}{=} (\delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} - \delta_{i\gamma}\delta_{j\beta}) a_j b_\beta c_\gamma = \\ & \stackrel{\substack{\text{по} \\ \text{определению} \\ \text{скалярного} \\ \text{произведения}}}{=} (a_j b_j c_i - a_j b_i c_j) = b_i(\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_i(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}))_i, \quad \text{т.е.} \\ \vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned} \quad (\text{a.10})$$

Очевидно, что таким путем можно вычислять выражения любой сложности как с векторами, так и с матрицами с использованием скалярных и векторных произведений

## 5. Антисимметричная матрица

Полезно рассмотреть конструкцию

$$e_{ijk} a_j, \quad (a.11)$$

Здесь  $a_j$  – вектор. Это выражение имеет два свободных индекса, т.е. является квадратной матрицей. Пользуясь определением ЕАС распишем ее по-компонентно:

$$\begin{aligned} e_{ijk} a_j &= (e_{ijk} a_j)_{ik} = -(e_{kji} a_j)_{ki} \\ e_{123} a_2 &= (e_{123} a_2)_{13} = a_2 \\ e_{231} a_3 &= (e_{231} a_3)_{21} = a_3 \\ e_{312} a_1 &= (e_{312} a_1)_{32} = a_1 \end{aligned} \quad , \quad (a.12)$$

$$(e_{ijk} a_j) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} e_{ijk} a_k &= (e_{ijk} a_k)_{ij} = -(e_{jik} a_k)_{ji} & e_{ijk} a_i &= (e_{ijk} a_i)_{jk} = -(e_{ikj} a_i)_{kj} \\ e_{123} a_3 &= (e_{123} a_3)_{12} = a_3 & e_{123} a_1 &= (e_{123} a_1)_{23} = a_1 \\ e_{231} a_1 &= (e_{231} a_1)_{23} = a_1 & e_{231} a_2 &= (e_{231} a_2)_{31} = a_2 \\ e_{312} a_2 &= (e_{312} a_2)_{31} = a_2 & e_{312} a_3 &= (e_{312} a_3)_{12} = a_3 \end{aligned} \quad , \quad (a.13)$$

$$(e_{ijk} a_k) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} = -(e_{ikj} a_k) \quad (e_{ijk} a_i) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} = -(e_{jik} a_i)$$

В области применения – восстановление трехмерных сцен, Эпиполярная геометрия и фундаментальная матрица вводят следующие обозначения:

$$[\bar{\mathbf{a}}]_x \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a.14)$$

откуда с учетом (a.13) в тензорной записи можно записать:

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{a}}]_x &\stackrel{def}{=} (e_{ijk} a_j) \\ [\bar{\mathbf{a}}]_x &= -(e_{ijk} a_i) \quad , \quad \det([\bar{\mathbf{a}}]_x) = 0 \quad , \quad \text{rank}([\bar{\mathbf{a}}]_x) \leq 2 \\ [\bar{\mathbf{a}}]_x &= -(e_{ijk} a_k) \end{aligned} \quad (a.15)$$

Матрица  $[\bar{\mathbf{a}}]_x$ , образованная из компонент вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  антисимметричная, при транспонировании меняет знак, имеет нулевой детерминант, и ранг равный двум (не превышающий, очевидно, что при определенном значении компонент ранг может быть равным 1 и даже 0 – для нулевого вектора).

## Литература.

1. Н. В. Свешникова, Д. В. Юрин. Априорный и апостериорный расчет погрешностей восстановления трехмерных сцен алгоритмами факторизации. // Программирование 2004, Т.30, № 5, С. 48-68.
2. Н. В. Янова, Д.В. Юрин. Итеративный алгоритм восстановления трехмерных сцен, движения и фокусного расстояния камеры в перспективной проекции, основанный на факторизации матриц. – В сб. Труды конференции. 12-я Международная конференция по Компьютерной графике и Машинному зрению ГрафиКон'2002 – стр. 123-129. Нижний Новгород, 2002. [http://www.graphicon.ru/2002/pdf/Yanova\\_Re.pdf](http://www.graphicon.ru/2002/pdf/Yanova_Re.pdf)
3. G. Csürka, C. Zeller, Z. Zhang, and O. Faugeras. Characterizing the uncertainty of the fundamental matrix. Technical Report 2560, I.N.R.I.A., France, 1995. <http://citeseer.ist.psu.edu/article/csurka95characterizing.html>

4. Gabriella Csurka and Cyril Zeller and Zhengyou Zhang and Olivier D. Faugeras. Characterizing the Uncertainty of the Fundamental Matrix, Computer Vision and Image Understanding: CVIU, 1997 -Vol 68, No 1, P 18-36, <http://citeseer.ist.psu.edu/article/csurka95characterizing.html>
5. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. Пособие. В 10 т. Т. II Теория поля. -7-у изд.испр. -М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 512 с. -ISBN 5-02-014420-7 (Т. II). § 6.
6. Д.В.Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. -- Учебник для вузов. -6-е изд., стер. -М.:Наука, ГРФМЛ 1987. -320с.
7. *Conrad I. Poelman, Takeo Kanade*. A Paraperspective Factorization Method for Shape and Motion Recovery: //Technical Report CMU-CS-93-219 / School of Computer Science, Carnegie Mellon University. — 11 December 1993. [http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub\\_1189.html](http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub_1189.html), [http://www.ri.cmu.edu/people/person\\_136\\_pubs.html](http://www.ri.cmu.edu/people/person_136_pubs.html)
8. *Carlo Tomasi, Takeo Kanade*. Shape and Motion from Image Streams: a Factorization Method, Part 3, Detection and Tracking of Point Features //Technical Report CMU-CS-91-132 / School of Computer Science, Carnegie Mellon University. — April 1991. [http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub\\_2543.html](http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub_2543.html)
9. Anton Shokurov, Andrey Khropov, Denis Ivanov. Feature Tracking in Images and Video. – В сб. Труды конференции. 13-я Международная конференция по Компьютерной графике и Машинному зрению ГрафиКон'2003 – стр. 177-179. Москва, 2003.
10. *Joao Paulo Salgado Arriscado Costeira*. A multi-body Factorization method for motion analysis: //Tese para obtencao do grau de doutor em Engenharia Electrotecnica e de Computadores. /Universidade Technica de Lisboa Instituto Superior Rechnico. Lisboa, Maio de 1995. <http://omni.isr.ist.utl.pt/~jpc/pubs.html>
11. Дж. Деммель. Вычислительная линейная алгебра. – М.: Мир, 2001.