

# Об одном диффузионном методе фильтрации и повышения резкости изображений.

Г.В.Борисенко, А.М.Денисов, А.С.Крылов

Кафедра математической физики ф-та ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова

## Введение.

Диффузионные фильтры активно используются для удаления и ослабления шума на изображениях. В работе [1] рассматривался способ повышения эффективности удаления шума с изображения за счет введения в коэффициент диффузии зависимости от локальной интенсивности. В данной работе рассмотрены модификации двух диффузионных фильтров и приведены изображения иллюстрирующие обоснованность их применения, в сравнении с не модифицированными аналогами. В заключительной части рассмотрена задача повышения резкости изображения с помощью уравнения диффузии с обратным направлением времени, где коэффициент диффузии также зависит от локальной интенсивности.

Алгоритмы обработки изображений, основанные на уравнении диффузии, применяются для решения различных задач [2-4]. Одним из наиболее популярных применений диффузии является фильтрация шума [5-7], а самым распространенным алгоритмом - свертка исходного изображения с функцией Гаусса. Такой метод является очень эффективным, но одновременно со сглаживанием шума, Гауссовский фильтр размывает и смещает границы объектов. В работах Перрона и Малика [8-9] авторы использовали специальный коэффициент диффузии, зависящий от градиента изображения, с помощью которого замедляли размытие границ объектов. Этот подход был расширен и исследован в последующих работах [10-12].

В процессе диффузионной фильтрации изображение размывается, становясь все более гладким. При этом необходимо, чтобы контуры объектов в меньшей степени подвергались сглаживанию, по сравнению с шумами. Для усиления процесса сглаживания шумов, внесем в коэффициент диффузии зависимость от локальной интенсивности изображения. Будем считать, что если суммарная интенсивность в некоторой фиксированной окрестности точки мала, то эта точка вероятнее всего является шумом, и должна размываться. Если же суммарная интенсивность велика, то считаем точку принадлежащей объекту или его границе, размытия которых мы пытаемся избежать.

В данной работе использован коэффициент диффузии, зависящий от интеграла текущей интенсивности локальной окрестности точки [1].

## Интегральный член в коэффициенте диффузии.

Пусть в прямоугольной области  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$  определена функция  $f \in C^2(\bar{\Omega})$ , задающая монохромное изображение. Тогда линейный диффузионный фильтр, он же Гауссовский фильтр, с постоянным коэффициентом диффузии  $D$  задается следующей задачей:

$$\begin{aligned} u_t &= D^2 \Delta u, & (x, y) \in \Omega, t > 0, & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= 0, & t > 0, \Gamma = \partial\Omega, & (2) \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), & (x, y) \in \bar{\Omega}. & (3) \end{aligned}$$

Взяв решение  $u(x, y, t)$  данной задачи при некотором  $t = T > 0$ , мы получим сглаженное изображение  $u(x, y, T)$ .

Модифицируем коэффициент диффузии, поставив коэффициент диффузии в зависимость от интеграла по локальной окрестности текущего решения

$$\begin{aligned} D(x, y, t; u) &= \left( 1 + \lambda^2 \int_{o(x,y)} \bar{u}(s, p, t) dsdp \right)^{-\frac{1}{2}} & (\lambda > 0) & (4) \\ \bar{u}(s, p, t) &= \begin{cases} u(s, p, t) & (s, p) \in \bar{\Omega} \\ 0 & (s, p) \notin \bar{\Omega} \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда задача для данного метода фильтрации будет выглядеть следующим образом

$$u_t = \operatorname{div} \left( \left( 1 + \lambda^2 \int_{o(x,y)} \bar{u}(s,p,t) dsdp \right)^{-1/2} \nabla u \right), \quad (x,y) \in \Omega, t > 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \Gamma = \partial\Omega, \quad (6)$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}. \quad (7)$$

Аналогичным образом, рассмотрим диффузионный фильтр, задаваемый краевой задачей

$$u_t = \operatorname{div} \left( D(|\nabla f|^2) \nabla u \right), \quad (x,y) \in \Omega, t > 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \Gamma = \partial\Omega, \quad (9)$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}. \quad (10)$$

где

$$D(|\nabla f|^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 |\nabla f|^2}} \quad (\lambda > 0) \quad (11)$$

Модифицируем его, как и предыдущий, поставив коэффициент диффузии в зависимость от интеграла по локальной окрестности текущего изображения

$$u_t = \operatorname{div} \left( \left( 1 + \lambda^2 |\nabla f|^2 \int_{o(x,y)} \bar{u}(s,p,t) dsdp \right)^{-1/2} \nabla u \right), \quad (x,y) \in \Omega, t > 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \Gamma = \partial\Omega, \quad (13)$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}. \quad (14)$$

### Результаты работы фильтров.

Для сравнения результатов фильтрации воспользуемся методом, предложенным в [1]. Время фильтрации, являющееся основным параметром методов, выбиралось следующим образом:

- На оригинале выбирается область  $G$  свободная от полезных объектов, в которой расположено множество шумов, которые необходимо удалить (выделена на рисунке прямоугольником).

- Выполняется подсчет суммарного значения модуля градиента в выбранной области («объем шума»).  $V(t) = \int_G |\nabla u(x,t)| dx$ .

- Устанавливается значение желаемого уровня объема шума.

- Процесс диффузии продолжается до тех пор, пока объем шума в выбранной области на фильтруемом изображении не снизится до требуемого значения.

Ниже приведены изображения, иллюстрирующие работу фильтров. На рисунках 1 и 4 представлены исходные изображения и указана область, в которой производится подсчет «объема шума». Далее, рисунки 2, 3, 5 и 6 демонстрируют результаты фильтрации исходных изображений. Изображение 2 отфильтровано Гауссовским фильтром, а изображение 3 фильтром, задаваемым задачей (5)–(7), причем «объем шума» на обоих этих изображениях в выбранной области одинаков. Результат фильтрации методом, описываемым задачей (8)–(10) приведен на рисунке 5, а модифицированным методом (12)–(14), на рисунке 6. Аналогично, величина «объема шума» в выбранной области также совпадает для изображений 5 и 6.

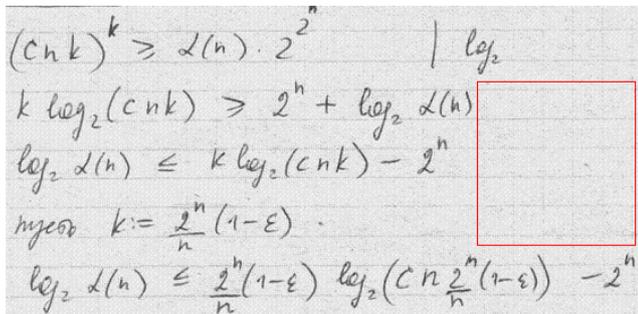


Рис. 1. Исходное изображение

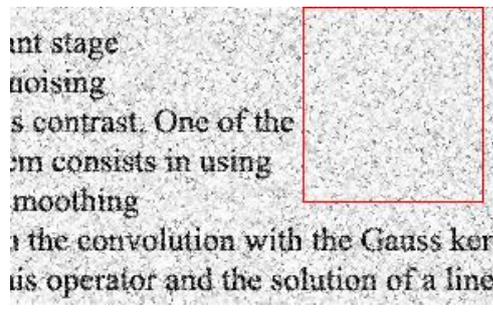


Рис. 4. Исходное изображение

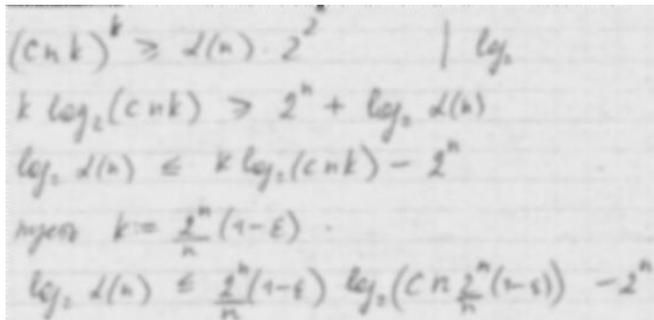


Рис. 2. Результат фильтрации с использованием задачи (1)–(3), «объем шума»  $V = 55$

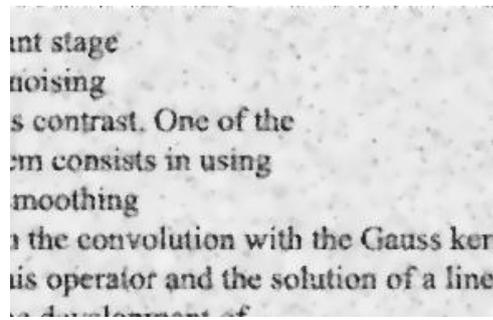


Рис. 5. Результат фильтрации с использованием задачи (8)–(10).  $\lambda = 0.04$ , «объем шума»  $V = 117$

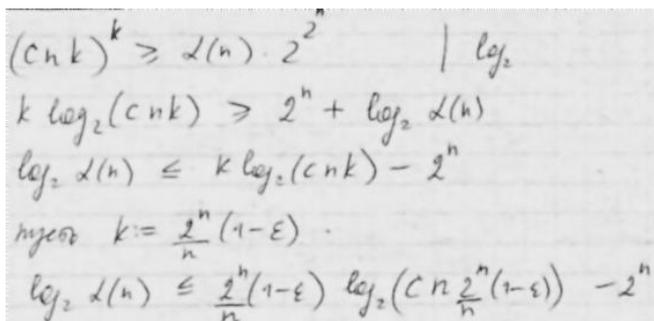


Рис. 3. Результат фильтрации с использованием задачи (5)–(7).  $\lambda = 0.1$ , «объем шума»  $V = 55$

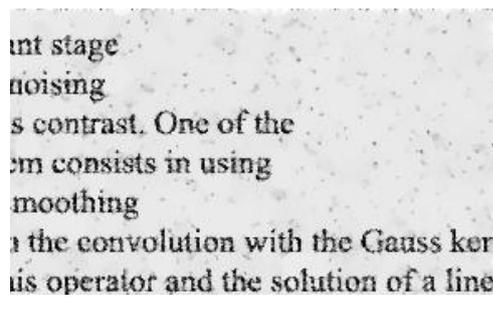


Рис. 6. Результат фильтрации с использованием задачи (12)–(14).  $\lambda = 0.04$ , «объем шума»  $V = 117$

**Повышение резкости изображений.**

Причины появления нерезких изображений могут быть самые разные. Это может быть нечеткая фокусировка устройства съема изображения. Малая светочувствительность устройства или недостаточная освещенность объекта съемки. Потеря резкости может быть вызвана также последующей обработкой изображения. Например, применением сглаживания для удаления шумов. Целью повышения резкости изображения является увеличение разницы между интенсивностью объектов и фона. Один из методов повышения резкости изображений основан на решении краевой задачи диффузии с постоянным коэффициентом диффузии с обратным направлением времени.

$$u_t = D^2 \Delta u, \quad (x, y) \in \Omega, t < T, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad t < T, \Gamma = \partial\Omega, \tag{16}$$

$$u(x, y, T) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \tag{17}$$

Хорошо известно, что задача (15)–(17) является некорректной и может не иметь решения. Для приближенного решения данной задачи можно использовать метод квазиобращения [13].

Пусть в прямоугольной области  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$  определена функция  $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ , задающая монохромное изображение. Тогда изображение  $u(x, y, t_0)$ , полученное в результате решения задачи (18)–(20) при  $t = t_0$ , будет более резким, чем исходное изображение  $\varphi(x, y)$ :

$$u_t = -D^2 \Delta u - \alpha \Delta (D^2 \Delta u), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \Gamma = \partial \Omega, \quad (19)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (20)$$

В процессе повышения резкости изображения описанным методом, изменение резкости между соседними точками происходит одинаково для всех точек изображения. Однако, желательно чтобы объекты на изображении усиливались в большей степени, нежели фон или шум. По аналогии с прямой задачей, модифицируем коэффициент диффузии, внося в него зависимость от интеграла по локальной окрестности текущего решения. Данный интеграл будет выступать в роли детектора объектов: те точки, где его значение велико будем считать принадлежащими объектам и усиливать с большей скоростью.

Коэффициент диффузии в данном случае будет выглядеть следующим образом:

$$\left( 1 + \lambda^2 \int_{o(x,y)} \bar{u}(s, p, t) dsdp \right)^{1/2} \quad (21)$$

Обозначим оператор, входящий в правую часть уравнения

$$A(u) = -\operatorname{div} \left( \left( 1 + \lambda^2 \int_{o(x,y)} \bar{u}(s, p, t) dsdp \right) \nabla u \right) \quad (22)$$

Тогда задача, используемая в модифицированном методе повышения резкости, записывается так:

$$u_t = A(u) + \alpha A^2(u), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \Gamma = \partial \Omega, \quad (24)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (25)$$

#### Численная реализация метода повышения резкости.

При численной реализации данного метода повышения резкости изображения в качестве результата работы фильтра принималось функция, полученная в момент времени, когда максимум градиента текущего решения становился больше или равен удвоенному максимуму градиента исходного изображения. Тем самым фиксировался момент, в который на изображении, ввиду некорректности исходной задачи (15)–(17), начинали появляться значительные осцилляции.

На рисунке 7 представлено исходное нерезкое изображение. Результаты повышения резкости с использованием метода (18)–(20) и с использованием метода (23)–(25), содержащего интегральную добавку в коэффициенте диффузии, изображены на рисунках 8 и 9 соответственно.

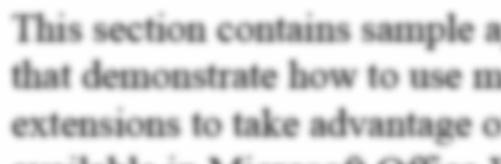


Рис.7 Исходное изображение

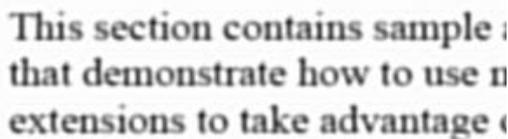


Рис.8 Изображение фильтрованное (18)–(20).  
 $\alpha = 0.2$

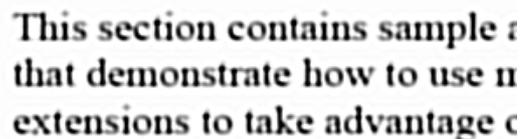


Рис.9 Изображение фильтрованное (23)–(25),  
 $\lambda = 0.01, \alpha = 0.2$

## Литература

- [1] Г.В.Борисенко, А.М.Денисов, А.С.Крылов, *Об одном методе диффузионной фильтрации изображений*, Программирование, №5, с. 43-47, 2004.
- [2] Weickert, J., *Applications of nonlinear diffusion in image processing and computer vision*, Acta Math. Univ. Comenianae, vol. 120, 1, pp. 33-50. 2001.
- [3]. Gilboa, G., Zeevi, Y., Y., Sochen, N., A., *Image Enhancement and Denoising by Complex Diffusion Processes*, IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, vol. 26, 8, pp 1020-1036.
- [4]. Alvarez, L., Lions, P.-L., Morel, J., *Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion*, SIAM J. Numeric Analysis, vol. 29, 3, pp. 845-866, 1992.
- [5]. Weeratunga, S., K., Kamath, C. *PDE-based non-linear Diffusion Techniques for Denoising Scientific and Industrial Images: an Empirical Study*, Lawrence Livermore National Laboratory Technical report, 2001.
- [6]. Weeratunga, S., K., Kamath, C., *A comparison of PDE-based non-linear anisotropic diffusion techniques for image denoising*, Lawrence Livermore National Laboratory Technical report, 2002.
- [7]. Lysaker, M., Lundervold, A., Tai, X., *Noise Removal Using Fourth-Order Partial Differential Equation With Applications to Medical Magnetic Resonance Images in Space and Time*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 12, 12, pp. 1579-1590, 2003.
- [8] Alvarez, L., Guichard, F., Lions, P.-L., Morel, J.-M., *Axioms and Fundamental Equations in Image Processing*, Arch. Rational Mech. Anal., vol. 123, pp. 199-257, 1993.
- [9] Perona, P., Malik J., Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, 7, pp. 629-639. 1990.
- [10] Weickert, J., *A review of nonlinear diffusion filtering*. Lecture Notes In Computer Science, vol. 1252, pp. 3 - 28, 1997.
- [11]. Weickert, J., Benhamouda, B., *A semidiscrete nonlinear scale-space theory and its relation to the Perona-Malik paradox*, Advances in Computer Vision, pp. 1-10, 1997.
- [12]. Weickert, J., Haar Romeny, B., M., Viergever, M., A., *Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering*, IEEE Trans. On Image Processing, vol. 7, 3, pp. 398-410, 1998.
- [13] Р. Латтес, Ж.-Л.Лионс, Метод квазиобращения и его приложения, Мир, Москва, 1970.