Лекция 5
Некорректные задачи в обработке изображений

Насонов Андрей Владимирович

http://imaging.cs.msu.ru/

Laboratory of Mathematics Methods of Image Processing
Department of Computational Mathematics and Cybernetics
Lomonosov Moscow State University

Вариационные методы

- Методы решения математических задач с помощью минимизации определённых функционалов

Вариационные методы

- План лекций
  - Некорректные задачи в обработке изображений
    - Примеры задач восстановления изображений
    - Задача обращения свёртки
    - Метод регуляризации Тихонова в классической постановке
    - Примеры применения метода регуляризации Тихонова
  - Методы регуляризации
    - Три эквивалентных способа постановки задачи минимизации
    - Стабилизаторы: полная вариация, полная обобщённая вариация
  - Численные методы минимизации регуляризирующих функционалов
    - Субградиентные методы, методы моментов, метод Нестерова
    - Численное дифференцирование
    - Практическое задание: реализация метода обращения свёртки с помощью регуляризации со стабилизатором в виде полной вариации
  - Суперразрешение изображений
    - Математическая модель
    - Суперразрешение по одному изображению
    - Многокадровое суперразрешение
    - Вариационный метод вычисления оптического потока

Некорректные задачи

- Признаки некорректной задачи
  - Решение отсутствует
  - Существует несколько решений
  - Решение неустойчиво: малое изменение входных параметров приводит к сильному изменению решения

Примеры некорректных задач в обработке изображений

- Восстановление размытых и зашумлённых изображений
- Повышение разрешения, многокадровое суперразрешение
- Заполнение пустот, реставрация (inpainting)
- Построение поля векторов движения между соседними кадрами на видео
- Нахождение границ между областями на изображении

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Источники размытия при съёмке
  - Нахождение объекта вне плоскости фокусировки
  - Движение объекта и камеры
  - Атмосферные эффекты
  - Несовершенство оптики
  - Антиалиасинговый фильтр

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Пример размытия: движение камеры

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Пример размытия: движение объекта

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Пример размытия: расфокусировка

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Пример размытия: объект вне плоскости фокуса

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Пример размытия: неравномерное движение

Условные обозначения

- Z – конечномерное нормированное пространство изображений
- $z \in Z$ – элемент пространства изображений
- $z_{i,j} \in \mathbb{R}^K$ – значения пикселей изображения в узлах равномерной сетки
  - K – число компонент пикселя (цвет)
  - (ih_x, jh_y) – координаты пикселей
  - $0 \le i < N, 0 \le j < M$ – размеры изображения
- $\|z\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} = \sum_{i,j} |z_{i,j}|^p$ - стандартная норма

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Общая математическая модель:

$$u = Az + n$$

Наблюдаемое изображение

Шум

Оператор размытия

Реальное изображение

- Требуется найти z при известном u
- Оператор A в общем случае неизвестен

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Общая математическая модель:

$$u = Az + n$$

- Упрощённая модель
  - A – оператор свёртки:

$$Az = z * H$$

    - Размытие линейно и одинаково для всего изображения
  - n – аддитивный белый шум
    - На практике используется шум с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Операция свёртки

$$z = f * g$$

- Непрерывный случай

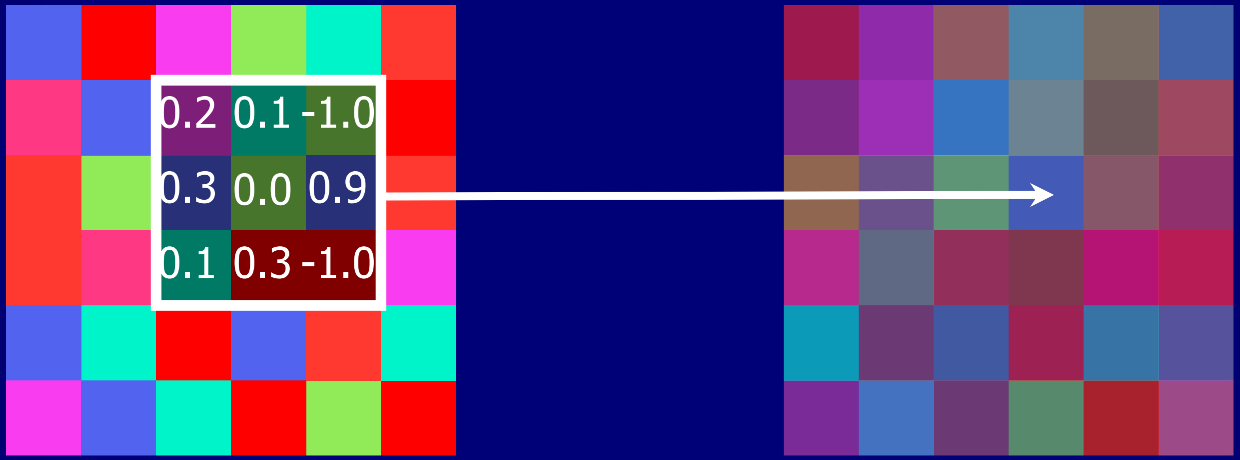
$$z(x,y) = \iint_{s,t} f(s,t)g(x-s,y-t)dsdt$$

- Дискретный случай

$$z_{i,j} = \sum_{s,t} f_{s,t}\, g_{i-s,j-t}$$

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Операция свёртки



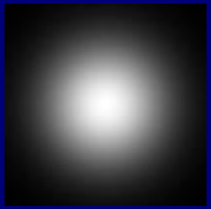
$$G = \begin{bmatrix} -1{,}0 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}0 & 0{,}3 \\ -1{,}0 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Упрощённая математическая модель

Резкое изображение

*



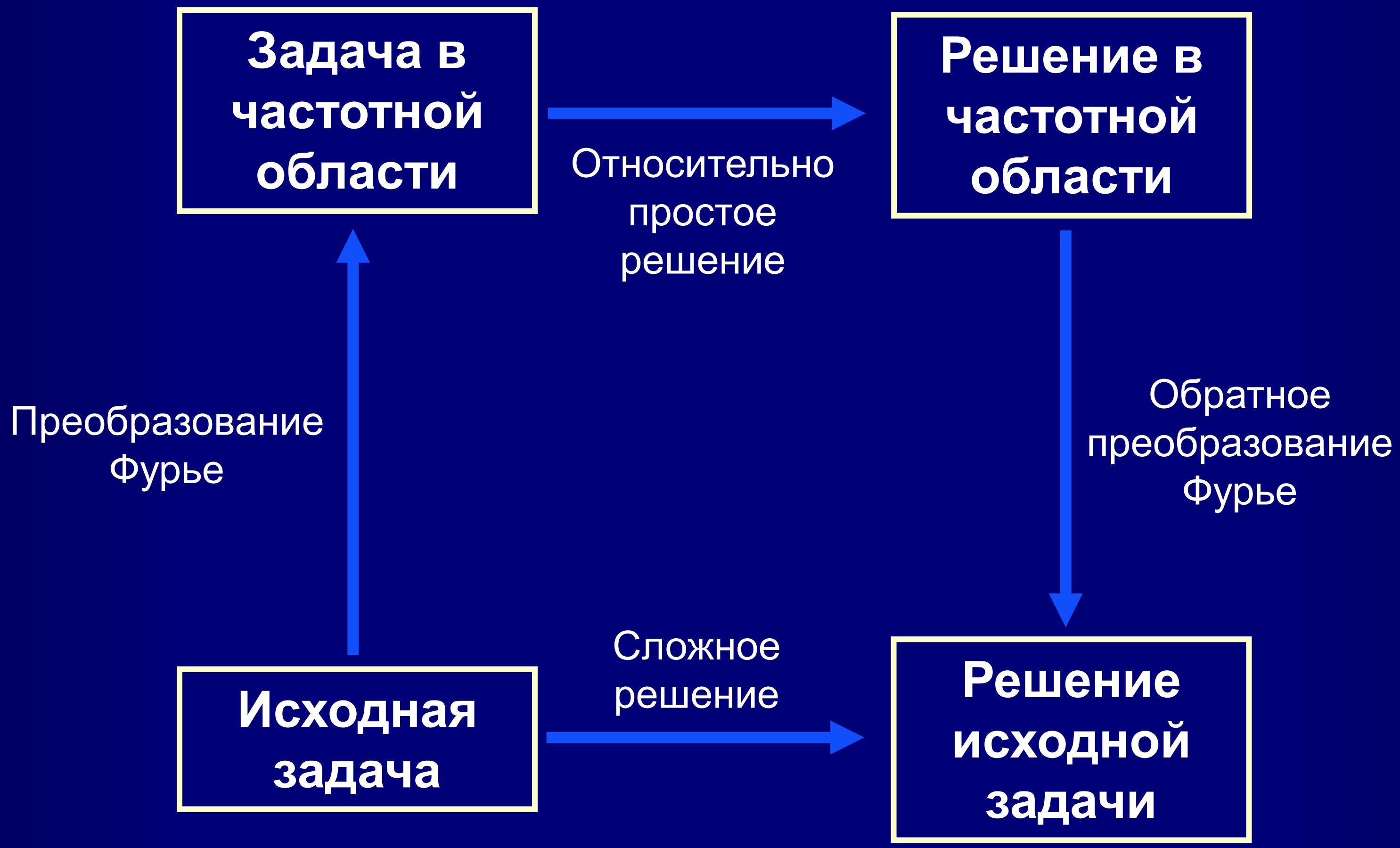
Ядро размытия

=

Размытое изображение

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Преобразование Фурье



Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Преобразование Фурье

$$F(u,v) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dxdy$$

$$f(x,y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{2\pi i(ux+vy)} dudv$$

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Преобразование Фурье

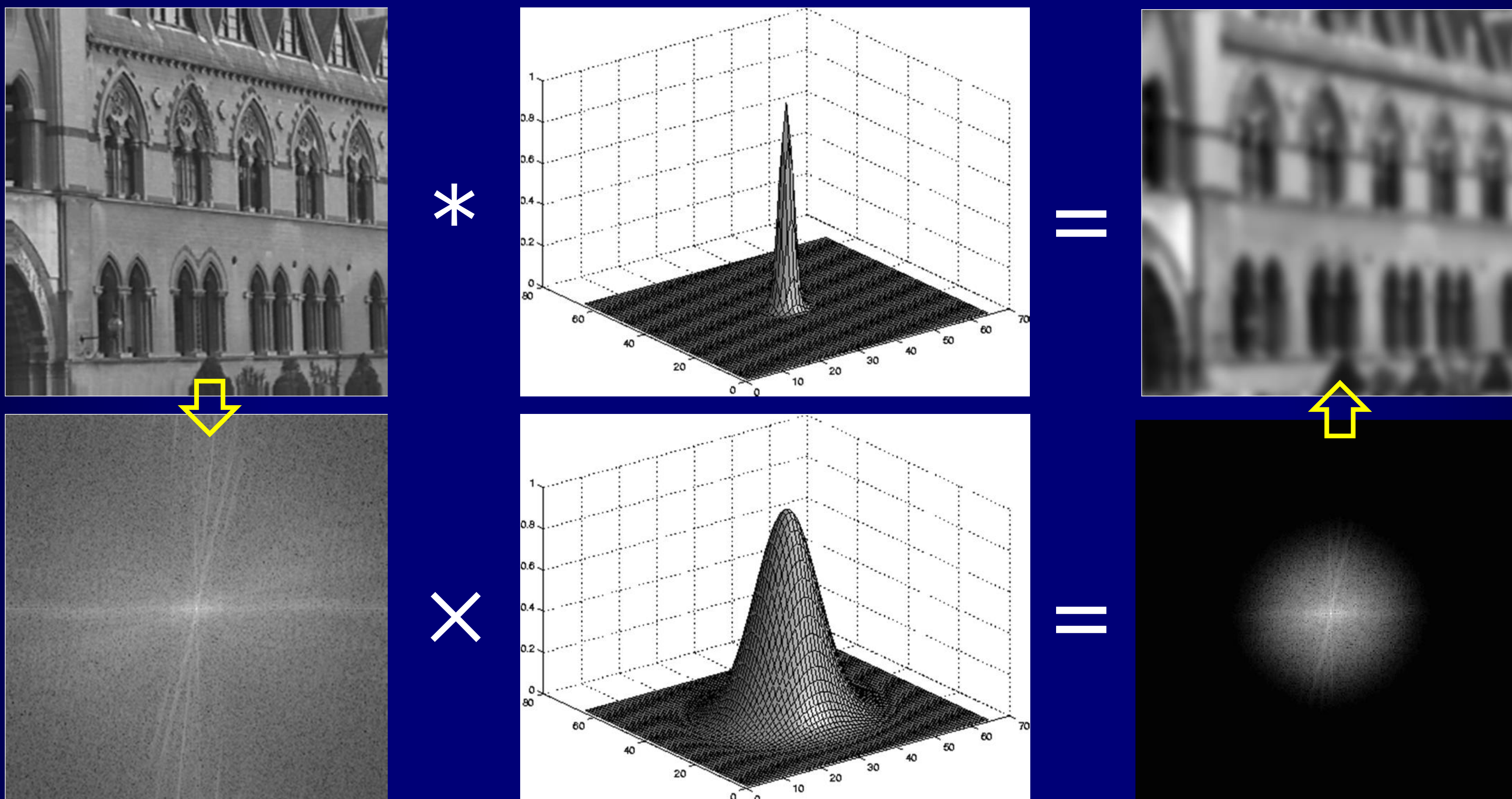
$$F_{u,v} = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f_{x,y}\, e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$f_{x,y} = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F_{u,v}\, e^{2\pi i\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Теорема о свёртке

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$



Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Обращение свёртки при отсутствии шума

$$u = z * H \Rightarrow z = u * H^{-1}$$

- Использование свойства преобразования Фурье

$$z = f * g \Leftrightarrow F(z) = F(f) \cdot F(g)$$

$$F(H^{-1}) = F(H)^{-1}$$

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Обращение свёртки при наличии шума

$$u = z * H + n$$
$$F(u) = F(z) \cdot F(H) + F(n)$$
$$F(z) = F(u) \cdot F(H)^{-1} - F(n) \cdot F(H)^{-1}$$

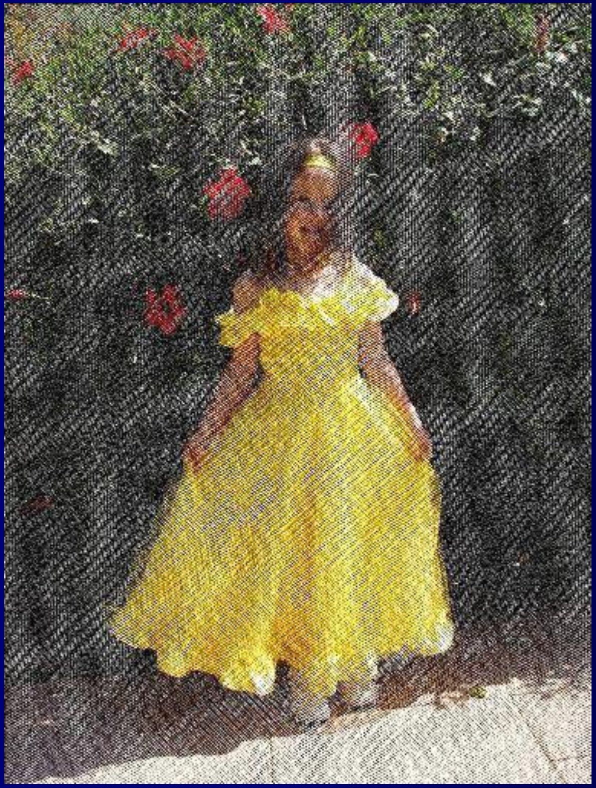
- Проблема: шум неизвестен, точное восстановление невозможно

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Обращение свёртки при наличии шума

Оригинальное изображение

Размытое и зашумлённое изображение



Результат обращения свёртки

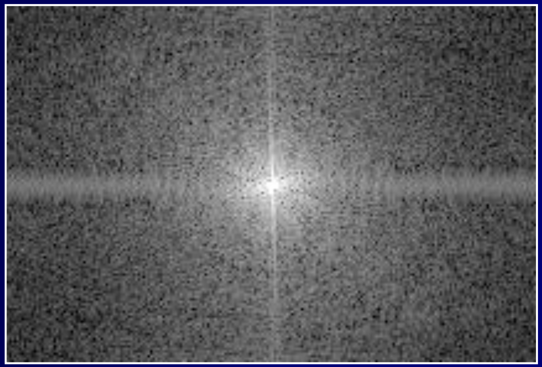
Восстановление размытых и зашумлённых изображений

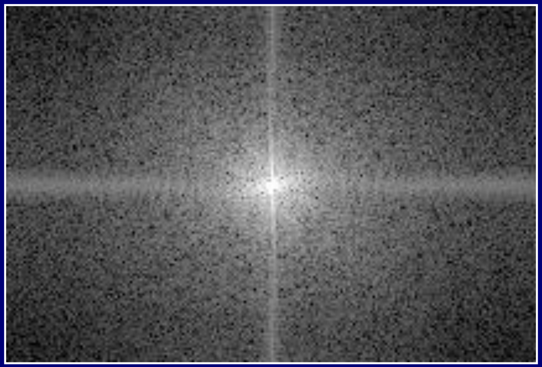
- Соотношение сигнал-шум

Исходное изображение

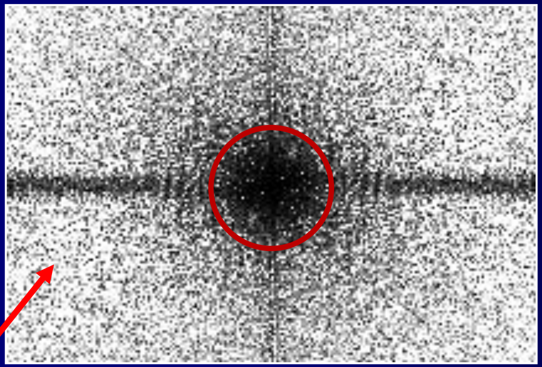
Размытие + шум

Модуль абсолютной разности





Модуль преобразования Фурье



Относительная разница

Превышение уровня шума над уровнем сигнала

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Применение низкочастотной фильтрации для устранения высокочастотного шума
  - Фильтр Гаусса

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Винеровская фильтрация

$$u = z * H + n$$

- Цель: найти фильтр G такой, чтобы $\hat{z} = u * G$ минимизировало среднеквадратичное отклонение от оригинального z

$$F(G) = \frac{1}{F(H)}\left[\frac{|F(H)|^2}{|F(H)|^2 + \frac{P(n)}{P(z)}}\right] = \frac{1}{F(H)}\left[\frac{|F(H)|^2}{|F(H)|^2 + \frac{1}{SNR}}\right]$$

- $P(n), P(z)$ – распределение мощности шума n и сигнала z в частотной области
- SNR – соотношение сигнал-шум

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Винеровская фильтрация

Метод регуляризации Тихонова

- Идея: нахождение приближённого решения некорректно поставленной задачи вместо точного
$$z_\alpha = R(u, \alpha)$$
  - $R(u, \alpha)$ определён для любых $\alpha > 0$ и $u \in U$
  - $R(u_\delta, \alpha) \to z_T$ при $u_\delta \to u_T$:

  Если $Az_T = u_T$, тогда существует $\alpha = \alpha(\delta)$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что если $\rho_U(u_\delta, u_T) < \delta$, тогда $\rho_Z(z_\alpha, z_T) < \varepsilon$, $z_\alpha = R(u_\delta, \alpha)$

Метод регуляризации Тихонова

- Некорректно поставленная задача

$$Az = u$$

- Регуляризирующий функционал

$$z_\alpha = \arg\min_z M^\alpha[u, z]$$

$$M^\alpha[u, z] = \rho_U^2(Az, u) + \alpha\Omega[z]$$

  – $\rho_U^2(Az, u)$ – невязка
  – $\Omega[z]$ – стабилизатор
  – α – параметр регуляризации

Метод регуляризации Тихонова

- Если
  - A – линейный непрерывный оператор
  - Z – множество решений $Z = \{z : Az = u, u \in U\}$
  - $\Omega[z] \geq 0$ и определён на Z
  - Множество $\{z : \Omega[z] \leq d\}$ является компактом для всех $d > 0$
- Тогда
  - $M^{\alpha}[u, z]$ является регуляризирующим функционалом

Восстановление размытых и зашумлённых изображений

- Регуляризирующий функционал

$$z_\alpha = \arg\min_z \left(\|Az - u\|_2^2 + \alpha\Omega[z] \right)$$

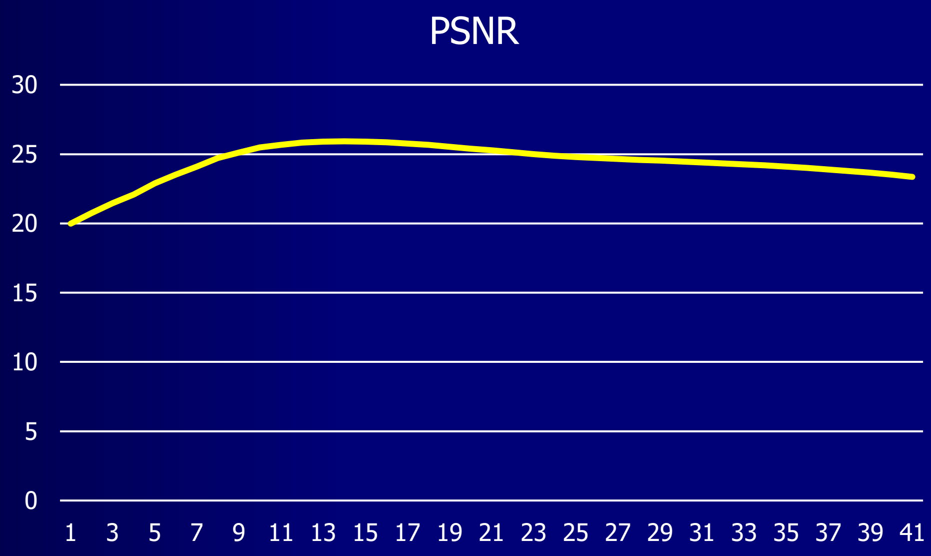
  – Проблема выбора параметра α
  – Проблема выбора стабилизатора $\Omega[z]$
  – Проблема минимизации функционала
  – Проблема нахождения оператора A

Выбор параметра регуляризации

- Влияние выбора параметра регуляризации на результат

Выбор параметра регуляризации

- Влияние выбора параметра регуляризации на результат



Выбор параметра регуляризации

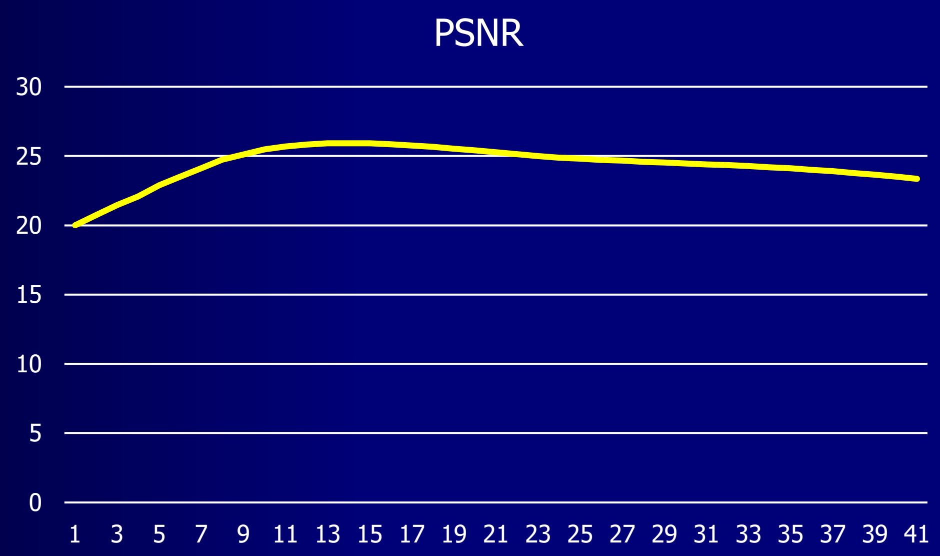
- Способы выбора параметра
  – Априорно
    - Предположение о том, что параметр один и тот же при одинаковых характеристиках шума
    - Использование баз изображений
  – Апостериорно
    - Анализ разностного изображения (задача шумоподавления): выбор параметра регуляризации, при котором соблюдается баланс между подавлением шума и сохранением деталей

Выбор параметра регуляризации

- Анализ разностного изображения для задачи шумоподавления с повышением резкости

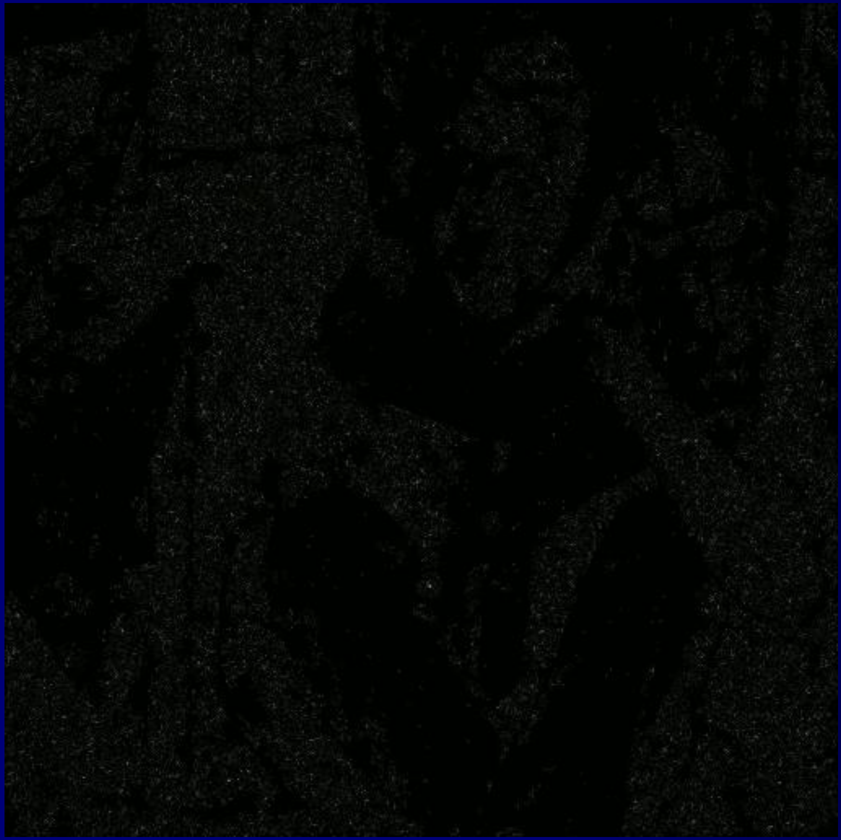
Выбор параметра регуляризации

- Анализ разностного изображения для задачи шумоподавления с повышением резкости



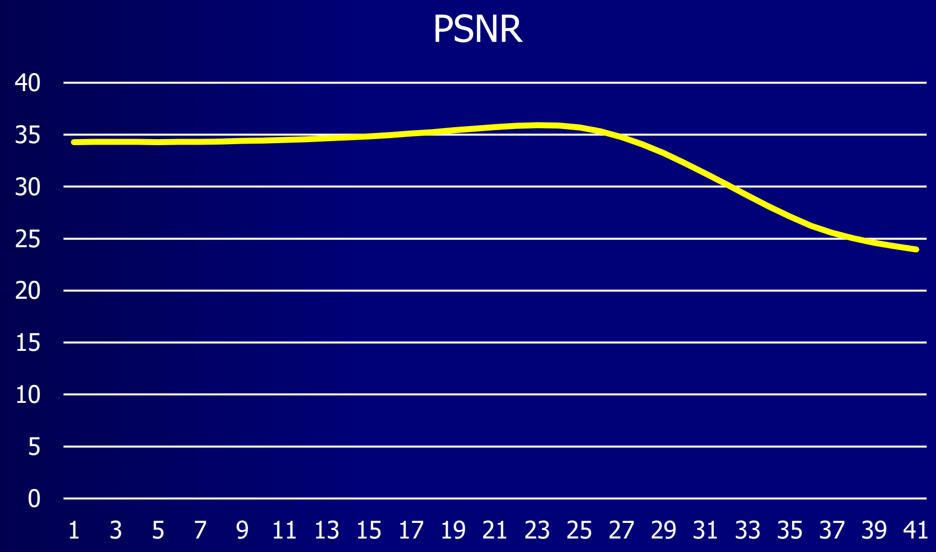
Выбор параметра регуляризации

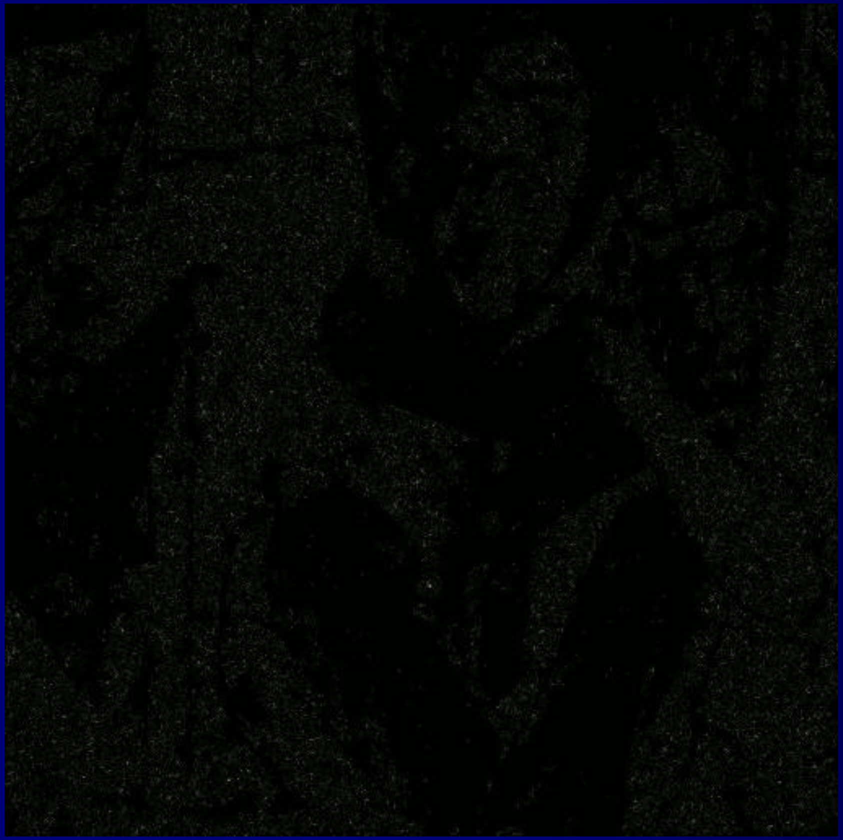
- Анализ разностного изображения для задачи шумоподавления без повышения резкости



Выбор параметра регуляризации

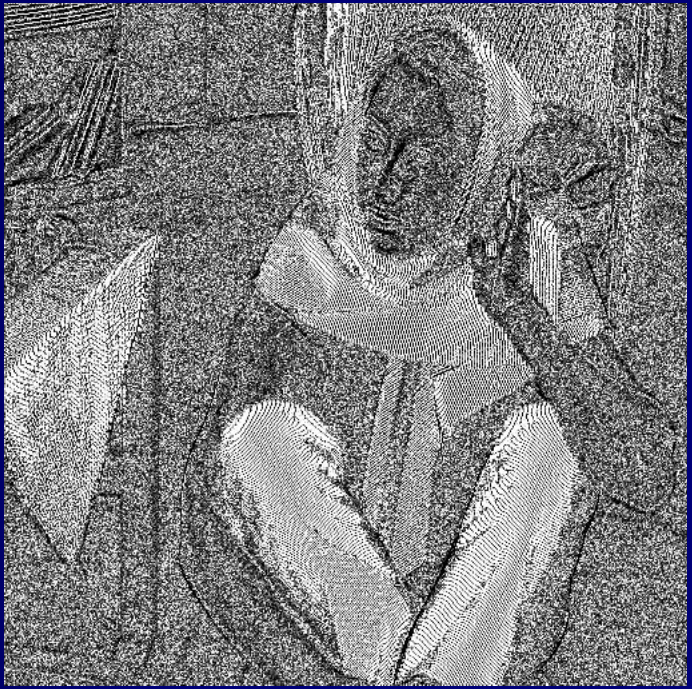
- Анализ разностного изображения для задачи шумоподавления без повышения резкости





Выбор параметра регуляризации

- Анализ разностного изображения для задачи шумоподавления без повышения резкости

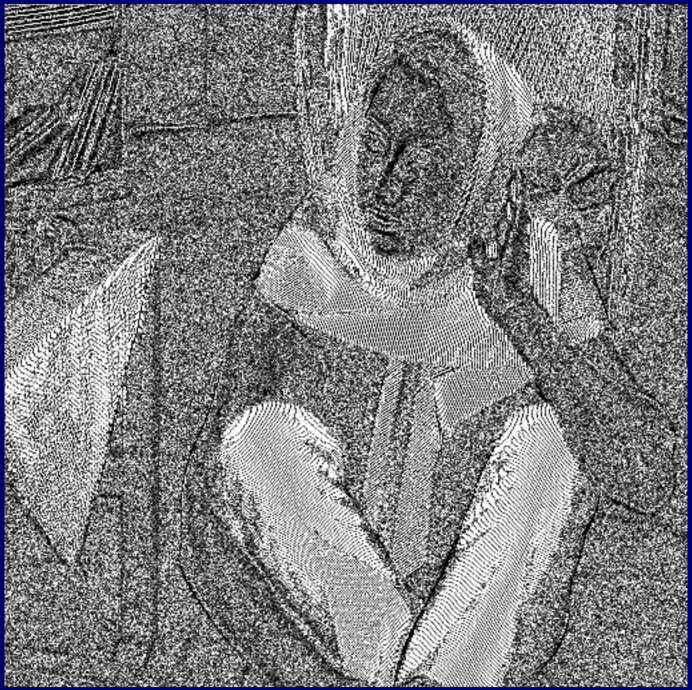


Изображение 28

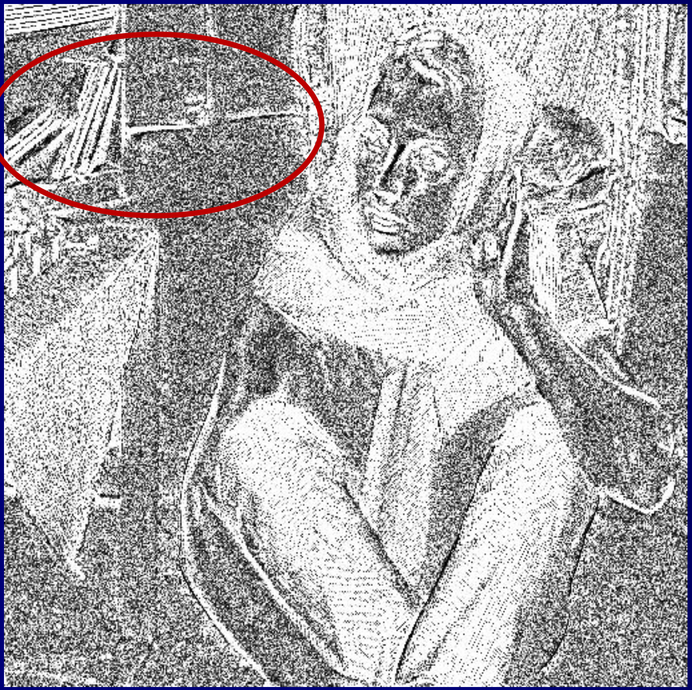
Изображение 40

Выбор параметра регуляризации

- Анализ разностного изображения для задачи шумоподавления без повышения резкости



Изображение 28

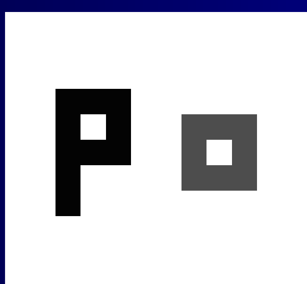


Изображение 40

Метод регуляризации Тихонова

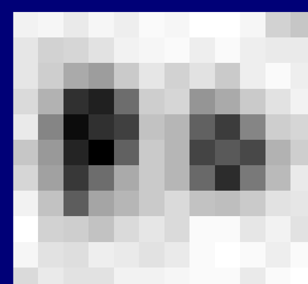
- Выбор стабилизатора
  - $\|z\|_2^2$
  - $\|\Delta z\|_2^2$

  Предложены А.Н.Тихоновым
  Плохо подходят для обработки изображений
  - $\|\nabla z\|_1$ – функционал полной вариации
- Примеры

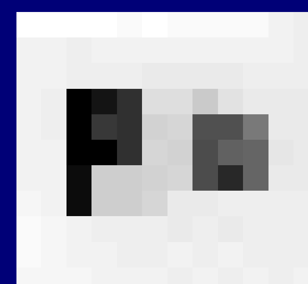


исходное изображение

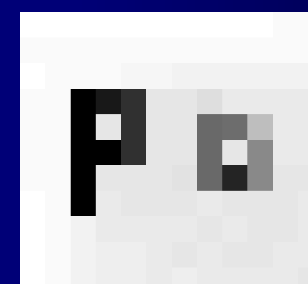
зашумлённое изображение



Восстановление со стабилизатором $\|\Delta z\|_2^2$



Восстановление со стабилизатором $\|\nabla z\|_1$



Восстановление со стабилизатором $BTV[z]$

Метод регуляризации Тихонова

- Проблема определения оператора A

$$J(A, z) = \|Az - u\|_2^2 + \alpha\Omega[z] + \beta\Psi[A]$$

  – Сложность численной оптимизации
  – В реальных задачах размытие своё в каждом пикселе
  – Задача до сих пор является открытой

Метод регуляризации Тихонова

- Задача обращения свёртки

$$z_\alpha = \arg\min_z(\|z * H - u\|_2^2 + \alpha\Omega[z])$$

- Задача шумоподавления

$$z_\alpha = \arg\min_z(\|z - u\|_2^2 + \alpha\Omega[z])$$

- Задача повышения разрешения

$$z_\alpha = \arg\min_z(\|D(z * H) - u\|_2^2 + \alpha\Omega[z])$$

- Задача заполнения пустот

$$z_\alpha = \arg\min_z(\|M(z - u)\|_2^2 + \alpha\Omega[z])$$