Свойства преобразования Фурье

$$1D$$

$$\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

$$2D$$

$$F(u,v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx dy$$

Свойства	Функция	Преобразование Фурье
	$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
Обратное преобразование	$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Свертка	$f_1 \star f_2(t)$	$\hat{f}_1(\omega)\,\hat{f}_2(\omega)$
Умножение	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\hat{f}_1 \star \hat{f}_2(\omega)$
Сдвиг	$f(t-u)$	$e^{-iu\omega}\hat{f}(\omega)$
Модуляция	$e^{i\xi t}f(t)$	$\hat{f}(\omega-\xi)$
Масштабирование	$f(t/s)$	$\|s\|\hat{f}(s\omega)$
Производная по времени	$f^{(p)}(t)$	$(i\omega)^p\hat{f}(\omega)$
Производная по частоте	$(-it)^p f(t)$	$\hat{f}^{(p)}(\omega)$
Комплексное сопряжение	$f^*(t)$	$\hat{f}^*(-\omega)$
Эрмитова симметрия	$f(t) \in \mathbb{R}$	$\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$

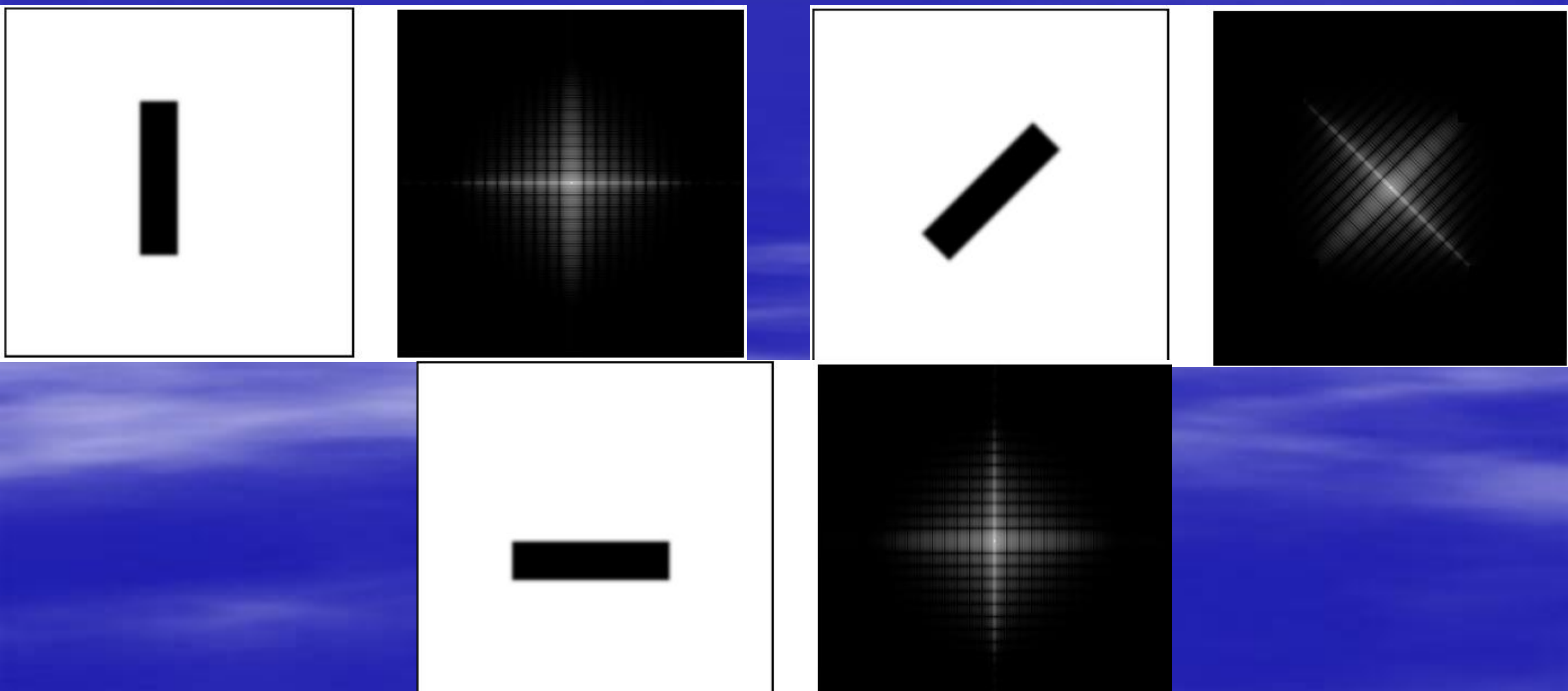
Rotation

If we introduce the polar coordinates

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad u = \omega\cos\phi \quad v = \omega\sin\phi$$

then $f(x, y)$ and $F(u, v)$ become $f(r, \theta)$ and $F(\omega, \phi)$, respectively. Direct substitution in the continuous Fourier transform pair yields

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0)$$



Proof

Convert to polar coordinates:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad dx\,dy = r dr\,d\theta$$
$$u = \omega\cos\phi \qquad v = \omega\sin\phi$$

$$\begin{aligned} F(\omega,\phi) &= \mathcal{F}\{f(r,\theta)\} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r f(r,\theta)\exp[-j2\pi\omega r(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi]dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r f(r,\theta)\exp[-j2\pi\omega r\cos(\theta-\phi)]dr\,d\theta \end{aligned}$$

Rotate $f(r,\theta)$ by θ_0:

$$\begin{aligned} F'(\omega,\phi) &= \mathcal{F}\{f(r,\theta+\theta_0)\} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r f(r,\theta+\theta_0)\exp[-j2\pi\omega r\cos(\theta-\phi)]dr\,d\theta \end{aligned}$$

Let $\lambda = \theta + \theta_0$

$$\begin{aligned} F'(\omega,\phi) &= \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0}\int_0^{\infty} r f(r,\lambda)\exp[-j2\pi\omega r\cos(\lambda-\theta_0-\phi)]dr\,d\lambda \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r f(r,\lambda)\exp[-j2\pi\omega r\cos(\lambda-(\theta_0+\phi))]dr\,d\lambda \end{aligned}$$

i.e.,

$$F'(\omega,\phi) = F(\omega,\phi+\theta_0)$$

or

$$f(r,\theta+\theta_0) \leftrightarrow F(\omega,\phi+\theta_0)$$

Определённый интеграл. Определённый интеграл от функции в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен значению преобразования Фурье в 0.

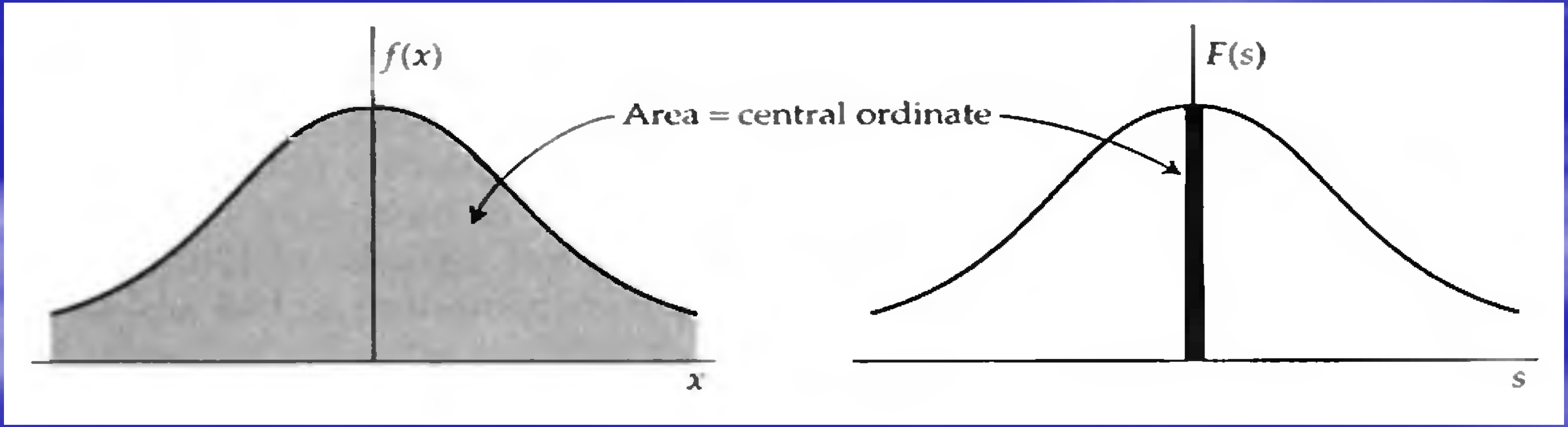
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(0), \quad (f \doteqdot F)$$

Вывод

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}\mathrm{d}x\right|_{s=0} = F(0).$$

Из симметрии преобразования Фурье следует $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x = f(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(0)$$



Теорема. Если функции f и h принадлежат $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{h}^*(w)\,dw,$$

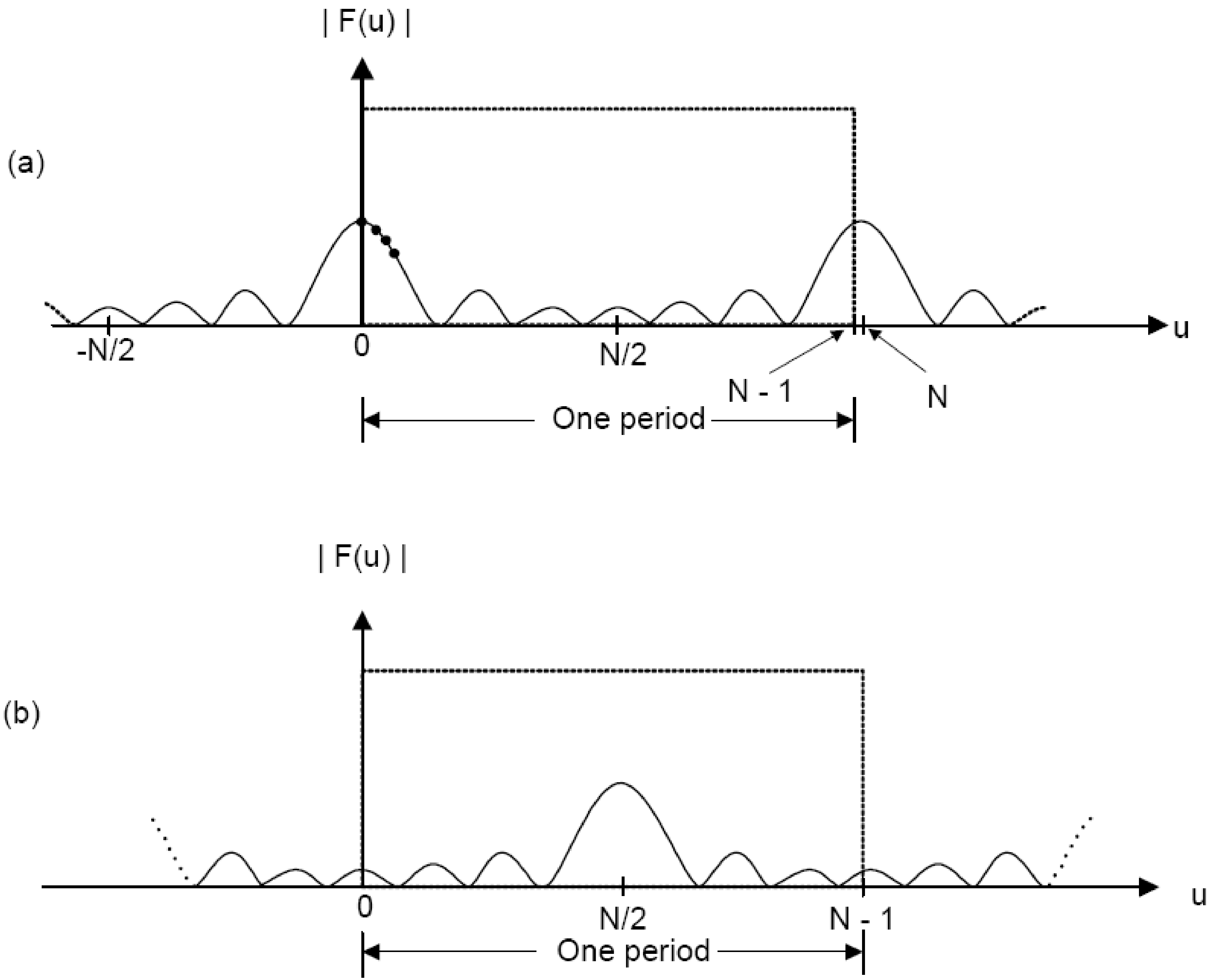
при $h = f$ из этого следует

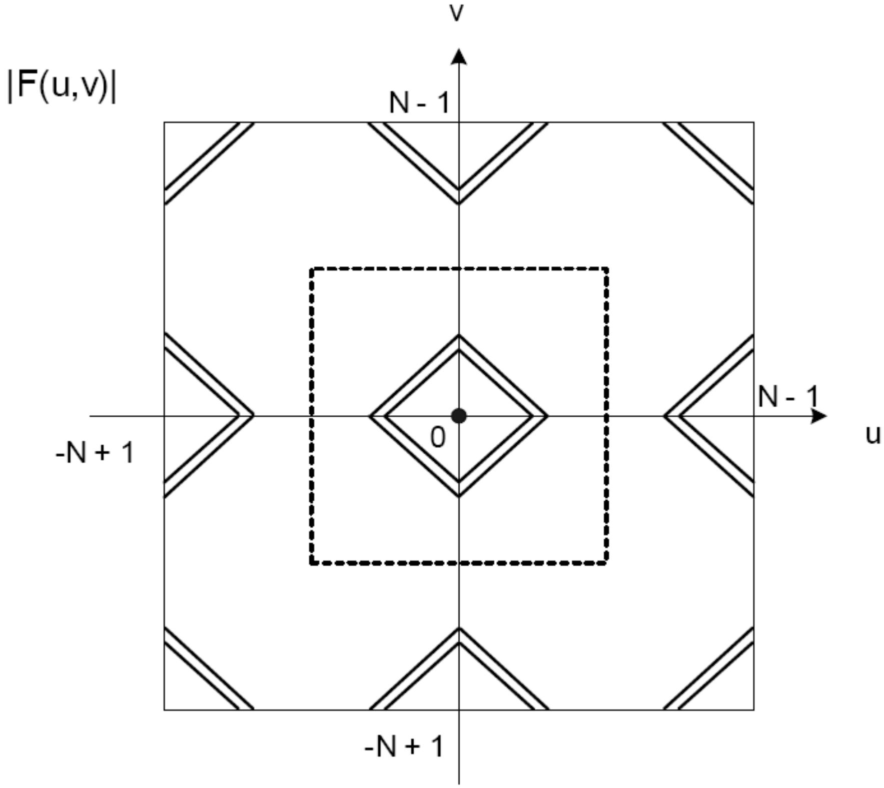
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2\,dw.$$

Доказательство. Пусть $g = f * \bar{h}$, где $\bar{h}(t) = h^*(-t)$.

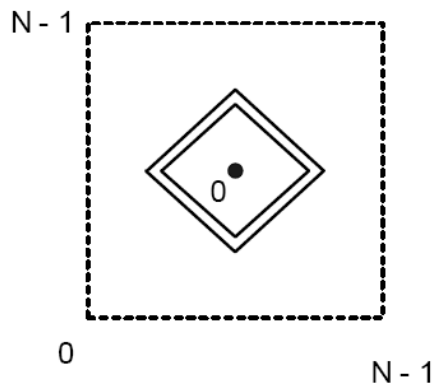
$$\hat{g}(w) = \hat{f}(w)\hat{h}^*(w)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t)\,dt = g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w)\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{h}^*(w)\,dw.$$

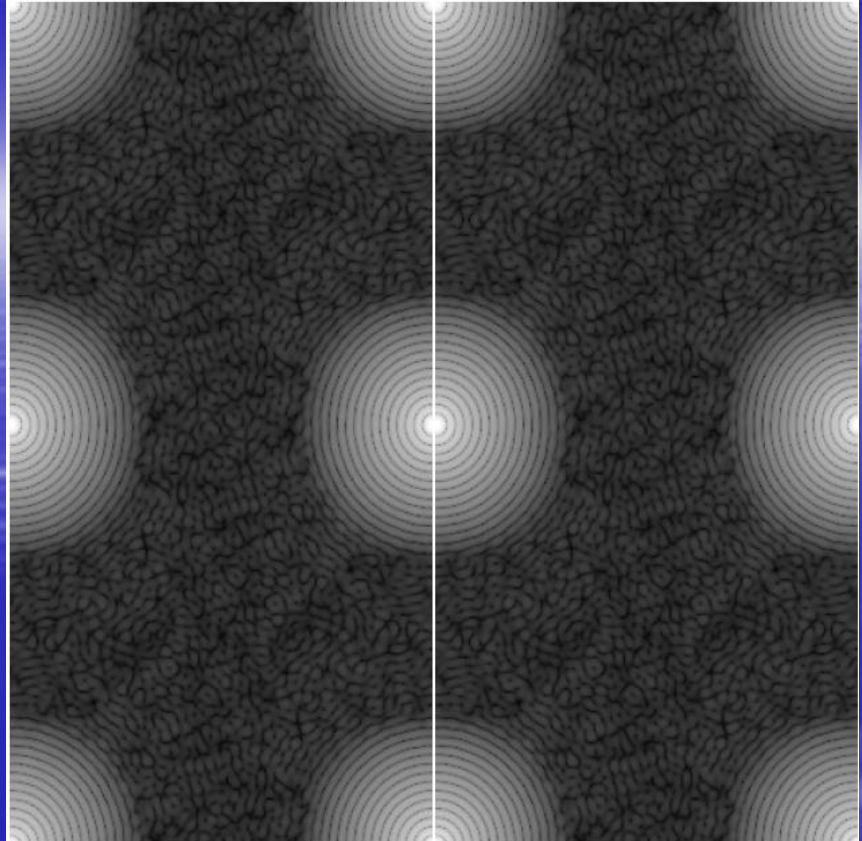

| F(u) |
(a)
-N/2
0
N/2
N - 1
N
u
One period
| F(u) |
(b)
0
N/2
N - 1
u
One period

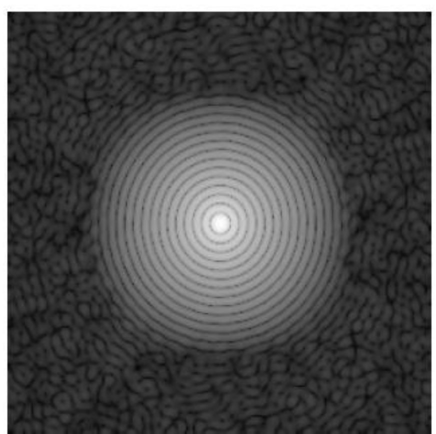


|F(u,v)|
v
N - 1
N - 1
u
0
-N + 1
-N + 1



N - 1
0
0
N - 1





Теорема. Если $f \neq 0$ имеет компактный носитель, то $\hat{f}(w)$ не может иметь компактного носителя. Аналогично, если $\hat{f}(w)$ имеет компактный носитель, то $f(t)$ не может иметь компактного носителя.

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение, так как второе следует из первого с помощью преобразования Фурье. Если $\hat{f}$ имеет компактный носитель, содержащийся в $[-b, b]$, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \hat{f}(w)\, e^{iwt}\, dw.$$

Если $f(t) = 0$ при $t \in [c, d]$, то дифференцируя n-раз под знаком интеграла, получим в точке $t_0 = (c + d)/2$

$$f^{(n)}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \hat{f}(w)(iw)^n\, e^{iwt_0}\, dw = 0.$$

Так как

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \hat{f}(w)\, e^{iw(t-t_0)}\, e^{iwt_0}\, dw,$$

то разложение $e^{iw(t-t_0)}$ в бесконечный ряд дает для всех $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[i(t-t_0)]^n}{n!} \int_{-b}^{b} \hat{f}(w) w^n\, e^{iwt_0}\, dw = 0.$$

Это противоречит нашему предположению, что $f \neq 0$.

Первый момент.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{F'(0)}{-2\pi i}.$$

Выводится из теоремы о производной

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi xi)f(x)e^{-i2\pi xs}\mathrm{d}x = F'(s).$$

Центроид.

$$\langle x\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x}.$$

$\langle x\rangle$ можно рассматривать как центр масс стержня с распределением плотности $f(x)$, или как время сигнала, если рассматривать функцию $f(t)$ как зависимость энергии сигнала от времени.

Связь центроида с преобразованием Фурье:

$$\langle x\rangle = -\frac{F'(0)}{2\pi i F(0)}.$$

Второй момент (момент инерции).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{F''(0)}{-4\pi^2}.$$

Выводится из теоремы о производной

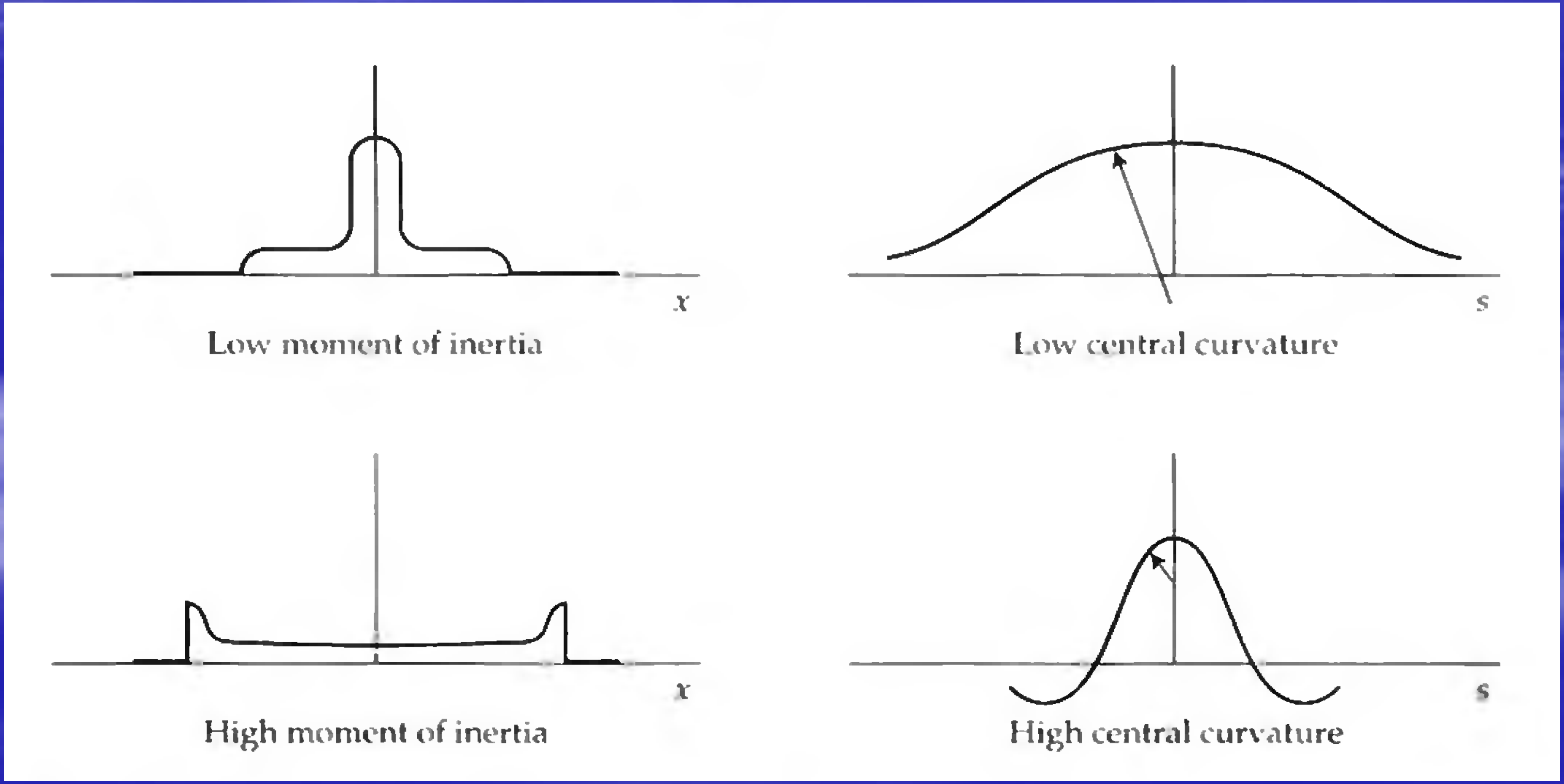
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi x i)^2 f(x) e^{-i2\pi x s}\mathrm{d}x = F''(s).$$

Моменты.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{F^{(n)}(0)}{(-2\pi i)^n}.$$

Инерция (второй момент)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$



$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x} = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)}.$$

$$\langle x^2 \rangle_{f*g} = \langle x^2 \rangle_f + \langle x^2 \rangle_g + 2\frac{F'(0)}{2\pi i F(0)}\frac{G'(0)}{2\pi i G(0)}.$$

Взяв $g = \delta(x-a)$ получим

$$\langle x^2 \rangle_{f(x-a)} = \langle x^2 \rangle_f + a^2.$$

Дисперсия.

$$\sigma^2 = \langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\langle x\rangle)^2 f(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x} = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)} + \frac{(F'(0)^2)}{4\pi^2 (F(0))^2}.$$

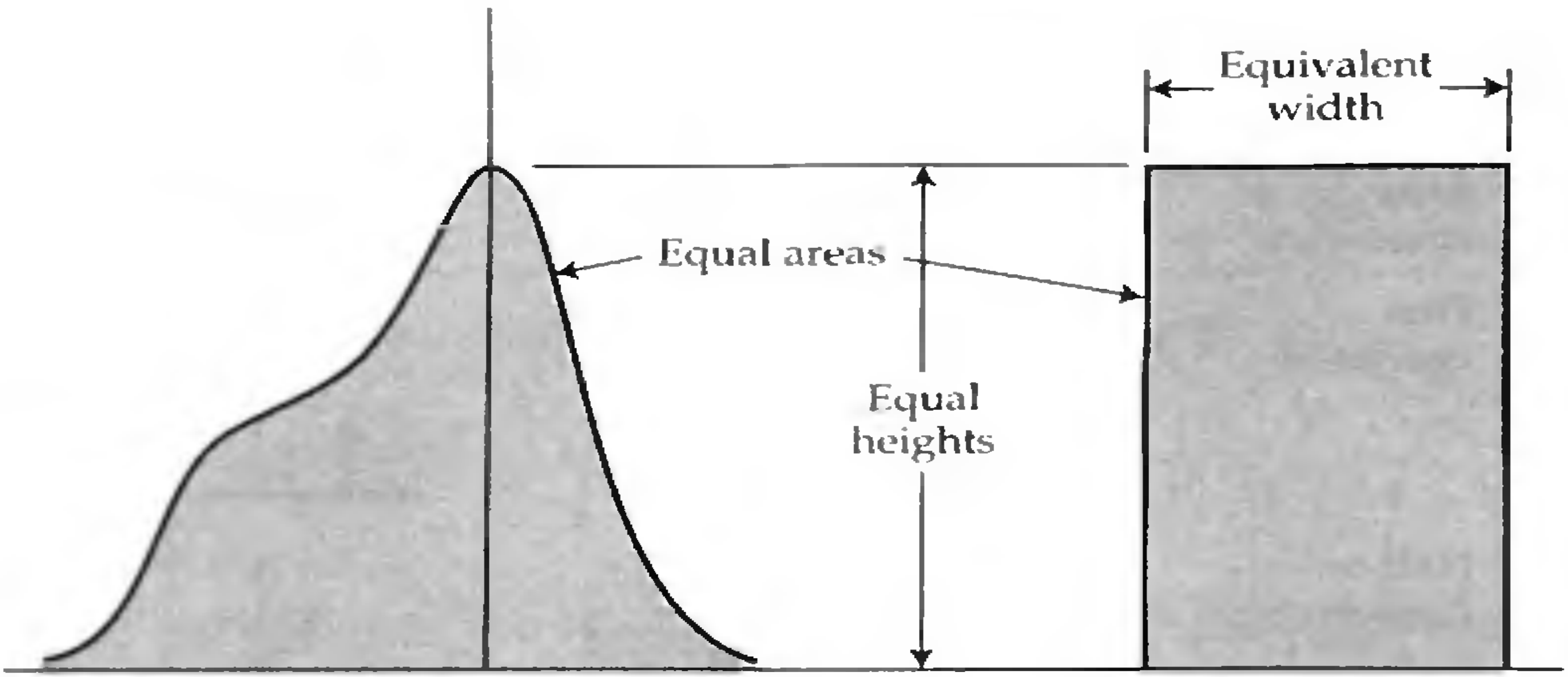
$$\sigma^2_{f*g} = \sigma^2_f + \sigma^2_g.$$

Ширина локализации.

$$W_f = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x}{f(0)} = \frac{F(0)}{\int\limits^{+\infty} F(s)\mathrm{d}s} = \frac{1}{W_F}.$$

Эквивалентная ширина

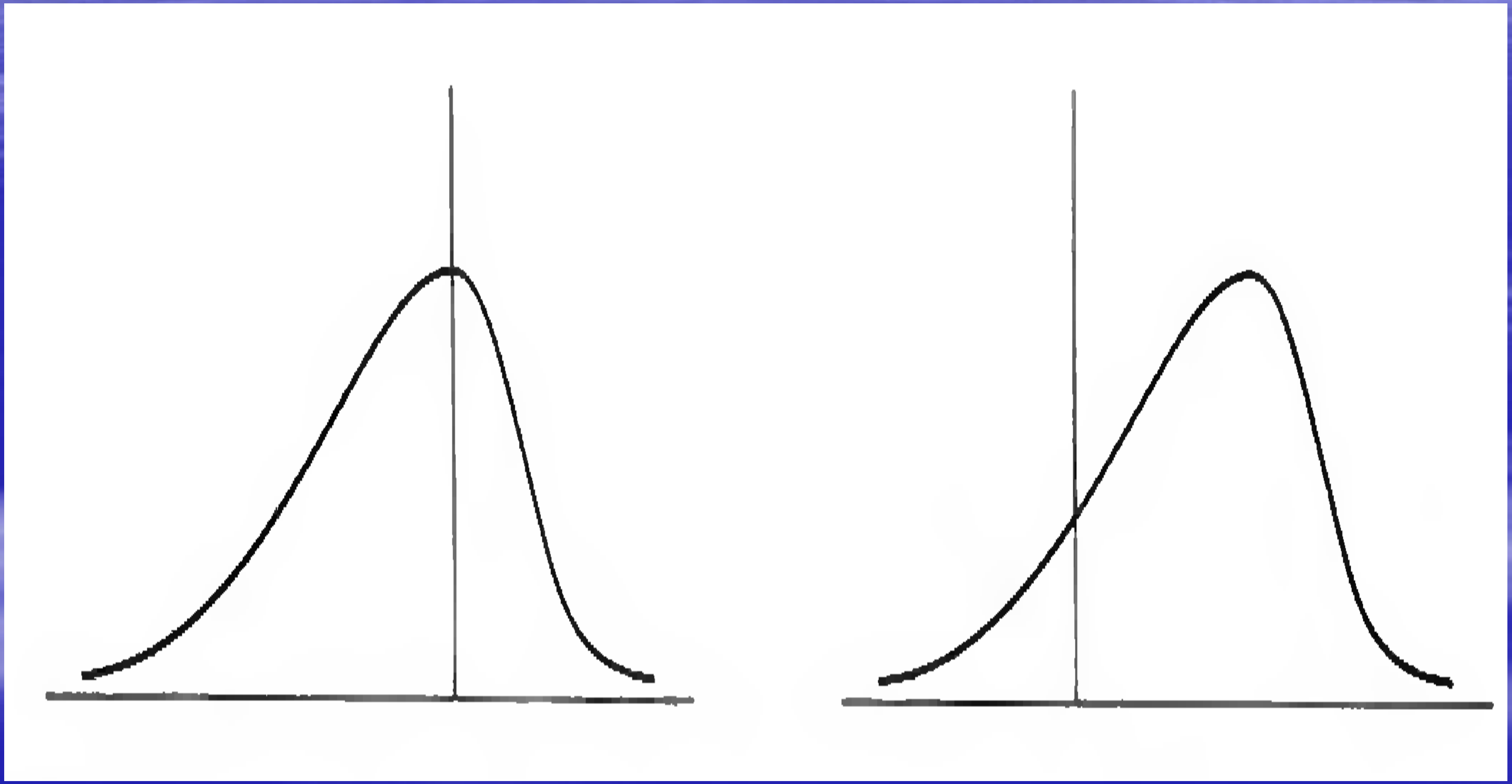
$$W_f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}{f(0)}$$



The "equivalent width" of a function.

Автокорреляционная ширина

$$W_{f^* * f} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f^* * f)\, dx}{f^* * f\,|_0}$$



Некоторые неравенства. $|f(x)| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(s)|\mathrm{d}s$ выводится из $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{i2\pi xs}\mathrm{d}s$. Аналогично $|f'(x)| \leq 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |sF(s)|\mathrm{d}s$.

Неравенство Шварца. Для действительных функций

$$\left[\int g(x)f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int g^2(x)\mathrm{d}x \int f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Для комплексных функций:

$$\left[\int (g^*(x)f(x) + g(x)f^*(x))\mathrm{d}x\right]^2 \leq 4\int gg^*(x)\mathrm{d}x \int ff^*(x)\mathrm{d}x$$

Доказательство. Пусть ε -действительная константа

$$0 < \int (f(x) + \varepsilon g(x))(f(x) + \varepsilon g(x))^*\mathrm{d}x.$$

$$0 < \int f(x)f(x)^*\mathrm{d}x + \varepsilon \int (g^*(x)f(x) + g(x)f^*(x))\mathrm{d}x + \varepsilon^2 \int g(x)g(x)^*\mathrm{d}x.$$

В правой части неравенства стоит полином 2й степени относительно ε: $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$. для выполнения неравенства необходимо $b^2 - 4ac < 0$, откуда следует н-во Шварца.

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Соотношение неопределённости. Обозначим $(\triangle x)^2$ дисперсию $|f(x)|^2$, а $(\triangle s)^2$ - второй момент $|F(s)|^2$.

$$(\triangle x)^2(\triangle s)^2 \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Для доказательства понадобиься неравентво Шварца, формула $\int f' f'^* \mathrm{d}x = 4\pi^2 \int s^2 F F^* \mathrm{d}s$ и формула интегрирования по частям.

$$(\triangle x)^2(\triangle s)^2 = \frac{\int x^2 f f^* \mathrm{d}x \int s^2 F F^* \mathrm{d}s}{\int f f^* \mathrm{d}x \int F F^* \mathrm{d}s} = \frac{\int x f x f^* \mathrm{d}x \int f' f'^* \mathrm{d}x}{4\pi^2 (\int f f^* \mathrm{d}x)^2} \geq$$

$$\frac{|\int x f^* f' + x f f'^* \mathrm{d}x|^2}{16\pi^2 (\int f f^* \mathrm{d}x)^2} = \frac{|\int x \mathrm{d}(f f^*)|^2}{16\pi^2 (\int f f^* \mathrm{d}x)^2} = \frac{|\int f f^* \mathrm{d}x|^2}{16\pi^2 (\int f f^* \mathrm{d}x)^2} = \frac{1}{16\pi^2}.$$