

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

**А.С. Крылов**

**ВВЕДЕНИЕ В  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Учебное пособие

Москва, 2022

УДК 517.6  
ББК 22.193  
М18

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова*

Р е ц е н з е н т ы:

*Разгулин А.В.*, профессор, д.ф.-м.н.  
*Конущин А.С.*, доцент, к.ф.-м.н.

**Крылов А.С.**

**Введение в математические методы обработки изображений:** Учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.); – 101 с.

ISBN 000-0-00000-000-0

Учебное пособие включает в себя материал, являющийся основой ряда математических методов, используемых при обработке изображений. Рассматриваются как классические математические задачи обработки сигналов, так и методы и алгоритмы, развиваемые в настоящее время. Ключевой темой являются интегральные преобразования с ядрами Фурье. Рассмотрены также соотношение неопределенности в обработке сигналов, теорема Котельникова, Габоровская фильтрация и проекционный метод Эрмита. Большое внимание обращено на использование регуляризирующих методов решения некорректных задач для повышения разрешения изображений. Основной практической составляющей курса является применение изученной теории в обработке монохромных изображений.

Пособие рассчитано на студентов старших курсов бакалавриата, магистратуры и аспирантов, специализирующихся в области методов обработки изображений и компьютерного зрения.

УДК 517.6  
ББК 22.193

КРЫЛОВ Андрей Серджевич

В В Е Д Е Н И Е В М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Е  
М Е Т О Д Ы О Б Р А Б О Т К И И З О Б Р А Ж Е Н И Й  
Учебное пособие

Издательский отдел

Факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова  
Лицензия ИД В 05899 от 24.09.01 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус

Подписано к печати 00.00.0000 г. Формат 60x90 1/16 Усл.печ.л. 6,0 Тираж 100 экз. Заказ 000.

ISBN 000-0-00000-000-0

©Крылов А.С., 2022  
©Факультет вычислительной математики  
и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова, 2022

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>1 Преобразование Фурье — классическая основа методов обработки сигналов</b>	<b>8</b>
1.1 Тригонометрические ряды . . . . .	8
1.2 Ряд Фурье и дискретное преобразование Фурье для функции периода $2\pi$ . . . . .	11
1.2.1 Ряд Фурье для функции периода $2\pi$ . . . . .	11
1.2.2 Дискретное преобразование Фурье . . . . .	11
1.3 Преобразования Фурье и интегральные преобразования с ядрами Фурье . . . . .	16
1.3.1 Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье	16
1.3.2 Преобразование Фурье . . . . .	18
1.3.3 Интегральные преобразования с ядрами Фурье . . .	19
1.3.4 Преобразование Хартли . . . . .	21
1.3.5 Взвешенное преобразование Фурье . . . . .	22
<b>2 Свойства преобразования Фурье</b>	<b>24</b>
2.1 Одномерное преобразование Фурье . . . . .	24
2.1.1 Преобразование Фурье свертки и взаимной корреляции функций . . . . .	26
2.1.2 Равенство Планшереля. Устойчивость преобразования Фурье в $L_2$ . . . . .	29
2.2 Двухмерное преобразование Фурье . . . . .	31

2.2.1	Визуализация преобразования Фурье изображений .	33
2.2.2	Преобразование Фурье производных функции . . .	35
2.2.3	Преобразование Фурье повернутого изображения .	36
2.2.4	Важность фазы и амплитуды преобразования Фурье изображения . . . . .	38
2.2.5	Метрика сравнения изображений на основе взаимной корреляционной функции . . . . .	40
2.2.6	Преобразование Фурье для радиально-симметричных функций . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Проекционный метод с использованием функций Эрмита</b>	<b>46</b>
3.1	Многочлены и функции Эрмита . . . . .	46
3.1.1	Функции Эрмита – ортогональная система собственных функций преобразования Фурье . . . . .	48
3.1.2	Поведение функций Эрмита, теорема Сони́на . . . .	51
3.2	Одномерный и двухмерный проекционные методы с использованием функций Эрмита . . . . .	53
3.3	Примеры использования проекционного метода . . . . .	56
3.3.1	Предобработка данных для проекционного метода .	57
3.3.2	Фильтрация изображений . . . . .	58
3.3.3	Текстурный анализ изображений . . . . .	61
3.3.4	Фовеация изображений . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Соотношение неопределенности и теорема Котельникова-Шеннона</b>	<b>68</b>
4.1	Связь временной и частотной информации . . . . .	68
4.1.1	Теорема о компактных носителях . . . . .	68
4.1.2	Моменты функции . . . . .	69
4.1.3	Соотношение неопределенности . . . . .	72
4.1.4	Габоровская фильтрация . . . . .	74
4.2	Теорема Котельникова-Шеннона . . . . .	82

<b>5</b>	<b>Классические методы повышения разрешения изображений</b>	<b>88</b>
5.1	Линейные методы повышения разрешения изображений . .	91
5.2	Нелинейные методы повышения разрешения изображений	95
5.2.1	Интерполяция вдоль контуров . . . . .	95
5.2.2	Регуляризирующие методы . . . . .	97
5.2.3	Полная вариация функции . . . . .	100

# Введение

Данное пособие содержит часть материала спецкурса «Математические методы обработки изображений», читаемого на третьем курсе бакалавриата факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова. Методы обработки изображений являются очень быстро развивающейся областью исследований. Однако, наряду с необходимостью разработки и адаптации все новых подходов и методов, включая в том числе и методы глубокого обучения, это требует от студентов освоения ряда базовых концепций математических методов обработки изображений. В пособии особое внимание уделено вопросам практического введения в использование как одномерного и двумерного преобразований Фурье, так и интегральных преобразований с ядрами Фурье. Особое внимание уделено вопросу оптимальной одновременной локализации информации в пространственной и частотной областях: соотношению неопределенности; функциям Габора, на которых достигается минимум соотношения неопределенности; функциям Эрмита, являющимся собственными функциями преобразования Фурье. Рассмотрены также простейшие линейные и нелинейные методы повышения разрешения изображений, включая и регуляризирующие методы, и теорема Котельникова-Шеннона как теоретическое средство оценки возможности повышения разрешения изображений. Изложение базово ведется для случая функций непрерывного аргумента, переход к дискретным функциям проводится в основном как средство иллюстрации практического применения математических методов. Хотелось бы выразить благодарность за многолетнее сотрудничество в преподавательской и исследовательской де-

тельности к.ф.-м.н., со-руководителям студенческого учебного спецсеминара «Обработка изображений и компьютерное моделирование» факультета ВМК МГУ Насонову А.В., Сорокину Д.В., Хвостикову А.В. и Павельевой Е.А.

## Глава 1

# Преобразование Фурье — классическая основа методов обработки сигналов

### 1.1 Тригонометрические ряды

Определение 1. *Тригонометрическим рядом*  $T(x)$  называется ряд вида

$$T(x) = \frac{1}{2}A_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(x),$$

где  $A_0(x) = a_0$ ,  $A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ . При этом,  $n$ -я частичная сумма ряда  $T(x)$  имеет вид

$$s_n(x) = \frac{1}{2}A_0(x) + \sum_{m=1}^n A_m(x).$$

Коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  заданы: первые для  $n \geq 0$ , вторые для  $n \geq 1$ . Мы доопределим  $a_n, b_n$  также для остальных целых значений  $n$ , положив

$$a_{-n} = a_n \quad (n > 0), \quad b_0 = 0, \quad b_{-n} = -b_n \quad (n > 0),$$

и обозначим

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

так что

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Таким образом, мы можем записать частичные суммы ряда  $T(x)$  как

$$\begin{aligned} s_n(x) &= c_0 + \sum_{m=1}^n \{(c_m + c_{-m}) \cos mx + i(c_m - c_{-m}) \sin mx\} = \\ &= \sum_{m=-n}^{m=n} c_m e^{imx} = \sum_{m=-n}^{m=n} c_m \mathbf{e}_m(x), \end{aligned}$$

а сам ряд, как

$$T(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n(x).$$

Исходный и получившийся ряды называются *действительным* и *комплексным тригонометрическими рядами*, соответственно. Если тригонометрический ряд имеет суммой функцию  $f(x)$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ , то его коэффициенты могут быть просто выражены через  $f(x)$ . Допустим, например, что ряд сходится равномерно:

Определение 2. Ряд сходится *равномерно* на отрезке  $[a, b]$ , если для всякого положительного числа  $\varepsilon$  существует число  $N$  такое, что для всех  $n \geq N$  и для всех  $x$  из отрезка  $[a, b]$  выполняется неравенство

$$\|f(x) - s_n(x)\| \leq \varepsilon.$$

Тогда, помножив на  $\cos mx$  и на  $\sin mx$  или, в комплексном случае, на  $e^{imx}$ , проинтегрировав почленно от  $-\pi$  до  $\pi$ , используя известные формулы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n \neq 0, \\ 0, & m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m = n, \end{cases}$$

найдем, что

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Если  $f$  действительна, то  $a_n$  и  $b_n$  действительны, а  $c_n$  и  $c_{-n}$  являются комплексно сопряженными. Если  $f$  нечетна, то  $a_n = 0$  и

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Если  $f$  четна, то  $b_n = 0$  и формула для  $a_n$  преобразуется аналогично.

## 1.2 Ряд Фурье и дискретное преобразование Фурье для функции периода $2\pi$

### 1.2.1 Ряд Фурье для функции периода $2\pi$

Пусть задана некоторая функция  $f(x)$  периода  $2\pi$ , и мы хотим представить эту функцию в виде суммы тригонометрического ряда. Если такое представление возможно, то коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  ( $c_n$ ) необходимо получают с помощью формул (1.1). Определенные этим способом коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  ( $c_n$ ) называются *коэффициентами Фурье* для функции  $f(x)$ , а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется ее *рядом Фурье*. Наиболее часто используемым классом функций, для которых возможно их представление в виде ряда Фурье, являются кусочно-гладкие функции.

Определение 3. *Разрывами первого рода функции  $f(x)$*  называются точки  $x_0$ , где  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0 + 0)$ .

Определение 4. Функцию  $f(x)$  называют *кусочно-гладкой* на отрезке  $[a, b]$ , если она сама и ее производная либо непрерывны на этом отрезке, либо допускают на нем конечное число разрывов первого рода.

Утверждение 1. Ряд Фурье функции  $f(x)$  периода  $2\pi$ , кусочно-гладкой на любом конечном отрезке, сходится для всех значений  $x$ , причем его сумма равна  $f(x)$  в каждой точке непрерывности и равна  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$  в каждой точке разрыва. Если  $f(x)$  всюду непрерывна, то ряд сходится абсолютно (т.е. сходится ряд из абсолютных величин членов исходного ряда) и равномерно.

### 1.2.2 Дискретное преобразование Фурье

Система функций  $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  дискретна — в нее входят только целые «частоты»  $n$ . При численных расчетах, естественно, приходится ограничиваться конечными суммами  $s_N$  и конечным диапазоном частот (членов разложения в ряд Фурье). Если же дискретизация производится и

по отношению к переменной  $x$ , то мы приходим к *дискретному преобразованию Фурье* (ДПФ). Для него существует эффективный алгоритм расчета, называемый *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ).

Дискретное преобразование Фурье является, пожалуй, наиболее распространенным алгоритмом обработки сигналов различных размерностей, в том числе и изображений. При этом, например, архитектура сигнальных процессоров, по сравнению с микропроцессорами общего применения, имеет некоторые особенности, связанные со стремлением максимально ускорить выполнение дискретного преобразования Фурье.

Для двумерного случая изображений пара прямого и обратного дискретных преобразований Фурье задается формулами

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)},$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, M - 1, \quad v = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

и

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi(ux/M+vy/N)},$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, M - 1, \quad y = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Наиболее ярким примером использования ДПФ может служить стандарт компрессии изображений JPEG. Базовой идеей данного стандарта является аппроксимация яркостного и цветовых компонент изображения с помощью дискретного косинусного преобразования Фурье (ДКП), использующего разложение только по системе из косинусных функций. ДКП применяется для блоков разбиения изображения размера 8x8 пикселей. Полученные коэффициенты ДКП далее квантуются и, в зависимости от степени компрессии, при кодировании используется только часть базисных косинусных функций с максимальными модулями коэффициентов разложения. ДКП лежит также в основе стандартов сжатия видео: MPEG, H.264. При этом аппроксимация интенсивностей в каждом из

блоков проводится независимо, в связи с чем при высокой степени компрессии (сохранении для блока малого числа максимальных по модулю коэффициентов ряда Фурье и обнулении остальных) возникает блочный артефакт на границах блоков. В блочный артефакт существенный вклад вносит также операция квантования коэффициентов. Этот эффект особенно заметен на областях изображения с плавными изменениями яркости и в высокочастотных областях. Следует отметить, что стандарт JPEG предусматривает использование специальных фильтров для подавления блочных артефактов, но на практике подобные фильтры, несмотря на их высокую эффективность, практически не используются. Пример изображения с ярко выраженным блочным артефактом, появившимся при очень сильной компрессии изображения приведён на рис. 1.1.



Рис. 1.1: Пример изображения с появившимся при JPEG - компрессии блочным артефактом

ДПФ (БПФ), ставящее в соответствие  $2\pi$ -периодической функции  $f$  ее массив коэффициентов Фурье, существенно рассматривает  $f$  как функцию, заданную на всей прямой. При этом, мы можем найти локальные характеристики дискретизации функции  $f(x)$ ,  $y_n = f(2\pi n/N)$ ,  $0 \leq n \leq N$ , – положения ее экстремумов, пересечений нуля и т.д., но информация о коэффициентах  $c_n$  нелокальна! Дело в том, что для  $T$ -периодической функции, заданной на всей прямой, в качестве генерирующего ее сиг-

нала можно рассматривать любой отрезок этой функции длины  $T$ . Соответственно, рассматривая коэффициенты  $c_n$ , в принципе невозможно определить локальные характеристики  $f$ .

Приведенный ниже пример разложения функции с помощью ряда Фурье является иллюстрацией этого:

Пример.

Разрывная функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, \\ f(x + 2\pi), & \forall x, \end{cases}$$

имеет следующее представление в виде ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Коэффициенты  $c_n = 1/n$  убывают очень медленно при  $n \rightarrow \infty$ , и в каждой точке  $x \neq 0 \pmod{2\pi}$  плохая сходимость ряда определяется осцилляциями  $\sin(nx)$ .

Данный пример иллюстрирует еще одну неприятную особенность ряда и дискретного преобразования Фурье — осцилляции Гиббса. Осцилляции Гиббса, открытые Генри Уилбрахамом в 1848 году и переоткрытые через полвека Дж. Уиллардом Гиббсом, представляют собой особый способ поведения рядов Фурье кусочно-гладкой периодической функции на разрыве функции.

Сходимость в точках разрыва определяется Утверждением 1, но частичные суммы  $s_N$  ряда Фурье превосходят максимум функции, равный  $\pi/2$ , в некоторой точке  $x_N$  около нуля приблизительно на 9% и далее аппроксимируют исходную функцию как затухающие волны. Этот эффект аппроксимации функции отрезками ряда Фурье в англоязычной литературе носит название «ringing». В двумерном случае название этого

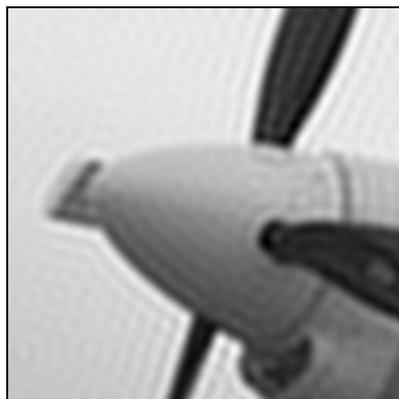


Рис. 1.2: Пример изображения с эффектом ложного оконтуривания при аппроксимации функции конечными суммами ряда Фурье

эффекта может быть переведено, с содержательной точки зрения, как «эффект ложного оконтуривания». Пример изображения с эффектом ложного оконтуривания приведён на рис. 1.2. Эффект виден на контурах изображения — резких изменениях интенсивности изображения. Отметим, что данный эффект характерен для результатов компрессии изображений с помощью алгоритма JPEG2000, где компрессия осуществляется с использованием вейвлетов.

### 1.3 Преобразования Фурье и интегральные преобразования с ядрами Фурье

#### 1.3.1 Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Пусть  $f(x)$  — функция, заданная для всех действительных  $x$  и кусочно-гладкая на каждом конечном интервале  $[-l, l]$ . Тогда на каждом таком отрезке  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right),$$

причем

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n u}{l} du, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{\pi n u}{l} du, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u - x) du. \quad (1.2)$$

Пусть существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Тогда имеет место формула (*интегральная формула Фурье*):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u - x) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u - x) du, \end{aligned}$$

а интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

называют *интегралом Фурье*.

Приведем соображения, поясняющие идею получения этой формулы.

Из (1.2), при  $l \rightarrow \infty$  ( $x$  — фиксировано) получаем:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l}(u-x) du.$$

Попытаемся установить, во что перейдет в пределе сумма справа. С этой целью обозначим:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \dots,$$

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда интересующая нас сумма будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega_n \int_{-l}^l f(u) \cos \omega_n(u-x) du,$$

напоминающий интегральную сумму для функции переменного  $\omega$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

составленную для промежутка  $[0, \infty)$ , что и позволяет ожидать выполнения интегральной формулы Фурье.

### 1.3.2 Преобразование Фурье

Исходя из интегральной формулы Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

и, учитывая, что для нечетной функции  $f(u) \sin \omega(u-x)$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega(u-x) du,$$

можно получить, складывая первую из этих формул со второй, умноженной на  $i$ , что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega(u-x)} du.$$

Данная формула называется *интегральной формулой Фурье в комплексной форме*.

Если обозначить

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du, \quad (1.3)$$

то получаем, что

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (1.4)$$

Эти формулы образуют пару *взаимных преобразований Фурье*, причем функцию  $F(\omega)$  называют *преобразованием Фурье* функции  $f(x)$ . Формула (1.4) называется формулой обращения преобразования Фурье или *обратным преобразованием Фурье*.

Формула

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du,$$

может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода относительно функции  $f(u)$ . Формула обращения дает решение этого интегрального уравнения.

Из интегральной формулы Фурье можно получить так называемые *синус-* и *косинус-* преобразования Фурье.

Например, считая  $f(u)$  нечетной на  $(-\infty, \infty)$ , получаем пару взаимных синус-преобразований Фурье:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin \omega u du,$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega.$$

### 1.3.3 Интегральные преобразования с ядрами Фурье

Обсудим вопрос наличия формул обращения для интегральных преобразований, аналогичных полученным выше для преобразования Фурье. Рассмотрим полупрямую  $(0, \infty)$  и введем

Определение 4. Интегральным преобразованием на полупрямой будем называть интеграл вида

$$I_f(\alpha) = \int_0^{\infty} K(x, \alpha) f(x) dx, \quad (1.5)$$

где  $f(x) \in \mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}$  - некоторый функциональный класс, а  $K(x, \alpha)$  - известная функция, которая называется ядром интегрального преобразования.

Примеры интегральных преобразований:

- При  $K(x, \alpha) = x^{\alpha-1}$ ,  $I_f(\alpha)$  — преобразование Меллина.

- При  $K(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$ ,  $I_f(\alpha)$  — преобразование Лапласа.
- При  $K(x, \alpha) = \cos(\alpha x)$ ,  $I_f(\alpha)$  — косинус-преобразование Фурье.

Выражение (1.5) можно также переписать как

$$I_f = Lf,$$

где  $L$  — линейный интегральный оператор, определяемый правой частью (1.5). Одна из основных задач теории интегральных преобразований состоит в том, чтобы установить функциональные классы  $B$  такие, что для любого  $I_f \in B$  существует единственное решение  $f(x) \in \mathfrak{F}$ . В ряде случаев оказывается, что  $L$  — непрерывно обратимый оператор из  $\mathfrak{F}$  в  $B$ . Тогда

$$f = L^{-1}I_f.$$

Пусть  $L^{-1}$  также имеет вид интегрального, т.е.

$$f(x) = \int_0^{\infty} H(\alpha, x) I_f(\alpha) d\alpha. \quad (1.6)$$

Определение 5. При выполнении условия

$$H(\alpha, x) = K(\alpha, x),$$

для обратного преобразования (1.6), функция  $K(\alpha, x)$  называется *ядром Фурье*.

Рассмотрим частный случай  $K(x, \alpha) = K(\alpha x) = K(\alpha, x)$ .

**Теорема.** Для того, чтобы функция  $K(x)$  являлась ядром Фурье необходимо, чтобы ее преобразование Меллина

$$\mathbf{K}(s) = \int_0^{\infty} K(x) x^{s-1} dx$$

удовлетворяло равенству

$$\mathbf{K}(s)\mathbf{K}(1-s) = 1.$$

**Доказательство.** Умножим обе части соотношения (1.5) на  $\alpha^{s-1}$  и проинтегрируем от 0 до  $\infty$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(s) &\equiv \int_0^{\infty} I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha = \\ &= \int_0^{\infty} \alpha^{s-1} \int_0^{\infty} K(\alpha x)f(x) dx d\alpha = \int_0^{\infty} f(x) \int_0^{\infty} K(\alpha x)\alpha^{s-1} d\alpha dx. \end{aligned}$$

После замены переменной  $u = \alpha x$ , получим

$$\mathbf{I}(s) = \int_0^{\infty} f(x) dx \int_0^{\infty} K(u)u^{s-1}x^{-s} du = \int_0^{\infty} f(x)x^{-s} dx\mathbf{K}(s).$$

Следовательно,

$$\mathbf{F}(1-s)\mathbf{K}(s) = \mathbf{I}(s). \quad (1.7)$$

Проделав те же преобразования для формулы (1.6), получим, что

$$\mathbf{I}(1-s)\mathbf{K}(s) = \mathbf{F}(s),$$

что после замены  $s$  на  $(1-s)$  приводит к

$$\mathbf{I}(s)\mathbf{K}(1-s) = \mathbf{F}(1-s).$$

Подстановка получившегося выражения для  $\mathbf{F}(1-s)$  в (1.7) завершает доказательство.

#### 1.3.4 Преобразование Хартли

В ряде случаев достаточно удобным является использование вместо преобразования Фурье чисто вещественного преобразования. Этому требо-

ванию удовлетворяет *преобразование Хартли*, которое для функции  $f(t)$  имеет вид:

$$H(\omega) = \{Hf\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{cas}(\omega t) dt.$$

Здесь используется функция «cas» (cosine-and-sine):

$$\text{cas}(t) = \cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2\pi} \sin(t + \pi/4) = \sqrt{2\pi} \cos(t - \pi/4).$$

Преобразование Хартли также является интегральным преобразованием с ядром Фурье, и формула его обращения имеет вид  $f(t) = \{H\{Hf\}\}$ . Легко показать связь интегрального преобразования Фурье в симметричной форме  $F(\omega)$  и интегрального преобразования Хартли:

$$F(\omega) = \frac{H(\omega) + H(-\omega)}{2} - i \frac{H(\omega) - H(-\omega)}{2};$$

преобразование Хартли равно разности вещественной и мнимой частей преобразования Фурье

$$\{Hf\} = \Re\{Ff\} - \Im\{Ff\}.$$

Отметим, что наряду с очевидным преимуществом вещественности, интегральное преобразование Хартли обладает достаточно эффективным алгоритмом быстрого вычисления, что используется, например, для алгоритма быстрого вычисления преобразования Радона (в области обработки изображений называемого также преобразованием Хафа).

### 1.3.5 Взвешенное преобразование Фурье

За счет очень большой избыточности, кодируя функцию одного действительного переменного двумерной функцией (*взвешенное преобразование Фурье*)

$$Gf(\omega, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-s)e^{-i\omega x} dx,$$

мы можем добиться лучшей локализации по получаемой информации о спектре — модуле преобразования Фурье. Такое преобразование также называется *оконным преобразованием Фурье*. При этом, *оконная функция*  $g(x)$  должна быть нормированной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1.$$

Она должна иметь либо компактный носитель, содержащий 0, например

$$g(x) = \begin{cases} 1/(2h), & x \in [-h, h], \\ 0, & x \notin [-h, h], \end{cases}$$

либо быть сосредоточенной с вычислительной точки зрения в конечной окрестности 0, как например Гауссовское окно

$$g(x) = \mathbf{N}_{\sigma,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}.$$

При этом ширина окна (ширина области локализации по  $x$ ) частотной информации  $Gf(\omega, s)$  в точке  $s$  определяется, соответственно, величинами  $h$  и  $\sigma$ . Эти величины должны согласоваться с характерной частотой сигнала (функции  $f$ ).

## Глава 2

# Свойства преобразования Фурье

### 2.1 Одномерное преобразование Фурье

Отметим, что под преобразованием Фурье понимается как симметричная (с точки зрения вида нормировочного коэффициента перед интегралом) форма (1.3), (1.4), так и несимметричная:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Также, особенно в западной технической литературе, часто при записи преобразования Фурье мнимая единица записывается не как  $i$ , а как  $j$ .

Приведем пример вычисления преобразования Фурье и его визуализации для функции, изображенной на рис. 2.1, играющий важную роль в обработке сигналов, и который мы будем использовать в дальнейшем при доказательстве теоремы Котельникова.

Преобразованием Фурье для этой функции в форме записи (1.3)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x} dx = A \int_0^W e^{-2\pi i\omega x} dx =$$

$$= -\frac{A}{2\pi i\omega} [e^{-2\pi i\omega x}]_0^W = AW \operatorname{sinc}(\omega W)e^{-i\pi\omega W}.$$

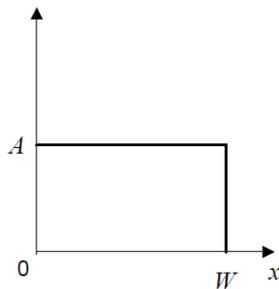


Рис. 2.1: Индикаторная функция  $f(x)$  отрезка  $[0, W]$  амплитуды  $A$

Обычно, как в одномерном случае, так и в двухмерном, при визуализации результата преобразования Фурье используют его модуль.

Соответственно,  $|F(u)| = |AW \operatorname{sinc}(uW)e^{-i\pi uW}|$ . Полученный модуль преобразования Фурье приведен на рис. 2.2.

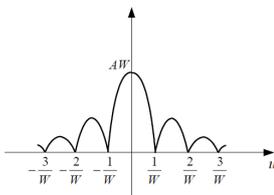


Рис. 2.2: Модуль преобразования Фурье индикаторной функции  $f(x)$  отрезка  $[0, W]$ .

Основные свойства преобразования Фурье доказываются достаточно просто. Таблица этих свойств преобразования Фурье (2.1) приведена для несимметричной формы его преобразования.

Таблица 2.1: Свойства преобразования Фурье

Свойство	Функция	Преобразование Фурье
Прямое преобразование	$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
Обратное преобразование	$\hat{f}(x)$	$2\pi f(-\omega)$
Сдвиг	$f(x - u)$	$e^{-i\omega u} \hat{f}(\omega)$
Модуляция	$e^{i\xi x} f(x)$	$\hat{f}(\omega - \xi)$
Масштабирование	$f(x/s)$	$ s  \hat{f}(s\omega)$
Производная	$f^{(p)}(x)$	$(i\omega)^p \hat{f}(\omega)$
Производная по частоте	$(-ix)^p f(x)$	$\hat{f}^{(p)}(\omega)$
Комплексное сопряжение	$f^*(x)$	$\hat{f}^*(-\omega)$
Эрмитова симметрия	$f(x) \in R$	$\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$

### 2.1.1 Преобразование Фурье свертки и взаимной корреляции функций

Важными с точки зрения обработки и анализа сигналов и изображений являются также теорема о свертке и равенство Планшереля. Их доказательства используют предположение об абсолютной интегрируемости рассматриваемых функций, необходимое для удовлетворения теоремы Фубини.

**Теорема Фубини.** Если  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)| dx_1 \right) dx_2 < \infty$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

#### Теорема о преобразовании Фурье свертки

Свертка функций является базовой операцией, выполняемой при обработке сигналов и изображений. Прежде всего, она используется для фильтрации сигналов, подавляя или выделяя их требуемые частотные характеристики. Это достигается за счет выбора функции, с которой осуществляется свертка сигнала (во многих приложениях называемой фильтром). Наиболее простым примером такой фильтрации является вычисление среднего значения сигнала в некоторой окрестности рассматриваемой точки.

Определение. Сверткой функций  $f$  и  $h$  называется функция

$$(f * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - u)h(u) du.$$

**Теорема.** Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R})$  и  $h \in L_1(\mathbb{R})$ . Тогда функция  $g = (f * h) \in L_1(\mathbb{R})$  и  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega)$ .

**Доказательство.**

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)h(u) du \right) dx.$$

Поскольку  $f(x-u)h(u) \in L_1(\mathbb{R}^2)$ , то мы можем применить теорему Фубини и, после замены переменной  $t = x - u$ , получаем

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u+t)\omega} f(t)h(u) dudt = \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} h(u) du \right). \end{aligned}$$

Такая же теорема верна и в двухмерном случае. Она позволяет изменить схему вычисления свертки, например при фильтрации изображения  $I$ , используя фильтр  $H$ . При этом, операция вычисления свертки изображений  $I$  и  $H$  сводится к следующей последовательности действий (преобразование Фурье обозначено символом  $F$ , а обратное преобразование Фурье как  $F^{-1}$ ):

$$\boxed{I, H} \rightarrow \boxed{F(I), F(H)} \rightarrow \boxed{F(I)F(H)} \rightarrow \boxed{I * H = F^{-1}(F(I)F(H))}$$

И, на практике, когда для дискретных сигналов (изображений) используется дискретное преобразование Фурье, это позволяет существенно ускорить вычисление достаточно трудоемкой операции свертки, применяя алгоритмы быстрого преобразования Фурье. Отметим, однако, что в случае достаточно небольшого носителя (размера) фильтра (например  $3 \times 3$  или  $5 \times 5$ ), свертка вычисляется без использования преобразования Фурье. Ускорение вычислений достигается при использовании фильтров с большими размерами носителей.

### Взаимная корреляционная функция

Часто при анализе сигналов используется понятие их *взаимной корреляционной функции* (correlation function). Ее также называют функцией взаимной корреляции. Введем ее для случая действительных функций  $f$  и  $h$ :

$$g(x) = (f \otimes h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-x)h(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(u+x) du.$$

Очевидна связь этой величины со сверткой функций:

$$f(u) * h(u) = f(-u) \otimes h(u). \quad (2.2)$$

Но, в отличие от свертки, для которой имеет место коммутативность

$$(f * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)h(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-u)f(u) du = (h * f)(x),$$

взаимная корреляционная функция таким свойством не обладает:

$$\begin{aligned} g(x) &= (f \otimes h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-x)h(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(u+x) du \neq \\ &\neq \int_{-\infty}^{\infty} h(u-x)f(u) du = (h \otimes f)(x) = g(-x). \end{aligned}$$

В этом смысле хорошей идеей является прочтение формулы  $f \otimes h$  как « $f$  сканирует  $h$ ». В соответствии с записанной выше формулой  $f$  сканирует  $h$  для вычисления  $g$ , поскольку  $h$  остается неподвижной, в то время как  $f$  двигается при изменении  $x$ .

Отметим, что в силу (2.2) теорема о преобразовании Фурье свертки легко переносится и на случай преобразования Фурье взаимной корреляционной функции.

При анализе сигналов часто также используется *автокорреляционная функция*  $f \otimes f$ , которая, например, помогает находить повторяющиеся участки сигнала.

### 2.1.2 Равенство Планшереля. Устойчивость преобразования Фурье в $L_2$

Преобразование Фурье является базовым понятием в обработке сигналов и является самым распространенным инструментом обработки и анализа изображений. Почему, например, мы практически не видим использования в этих областях преобразования Лапласа, которое отличается от преобразования Фурье присутствием вещественного слагаемого в экспоненциальном множителе?

Преобразованием Лапласа функции вещественной переменной  $f(t)$  («оригинал») называется функция  $L(p)$  («изображение») комплексной переменной  $p = \sigma + i\tau$ , такая что:

$$L(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.3)$$

Одной из особенностей преобразования Лапласа, которые предопределили его широкое распространение в научных и инженерных расчетах в докомпьютерную эпоху, является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями. Практически, большинство из его свойств совпадают со свойствами преобразования Фурье и, например, свертка двух функций сводится в пространстве изображений к операции умножения, а линейные дифференциальные уравнения становятся алгебраическими. Но эффективно работать с сигналами, аналогично тому, как это делается на основе преобразования Фурье, не получается. Связано это со следующими взаимосвязанными свойствами, которыми в отличие от преобразования Фурье не обладает преобразование Лапласа:

1. Преобразование Лапласа не является интегральным преобразованием с ядром Фурье. У него нет формулы обращения, позволяющей вычислять оригинал по его изображению. Проблема обращения преобразования Лапласа при компьютерных вычислениях практически не решается.

2. У преобразования Лапласа нет базиса из собственных функций в  $L_2$  в отличие от преобразования Фурье (собственные функции преобразования Фурье — функции Эрмита, будут рассмотрены далее в главе 3).

3. Задача нахождения оригинала в  $L_2$  по изображению из  $L_2$  для преобразования Лапласа не является устойчивой. Т.е. малое изменение по норме  $L_2$  функции-изображения  $L(p)$  может привести к сколь угодно большому изменению оригинала  $f(t)$  при его восстановлении. Преобразование Фурье такой устойчивостью обладает и является следствием следующей теоремы:

**Теорема.** Пусть  $f$  и  $h$  принадлежат  $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ , преобразование Фурье определено «симметрично» (1.3). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)h^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega) d\omega,$$

и, при  $f = h$ , выполняется **равенство Планшереля**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.4)$$

**Доказательство.** Обозначим  $g = f*\bar{h}$ , где  $\bar{h}(x) = h^*(-x)$ . По теореме о преобразовании Фурье свертки  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega)$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h^*(x) dx &= g(0) = \\ &<\text{используем формулу обратного преобразования Фурье}> \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega) d\omega \end{aligned}$$

При  $f = h$  получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

## 2.2 Двухмерное преобразование Фурье

Преобразование Фурье функции двух переменных  $f(x, y)$  определяется как

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy. \quad (2.5)$$

При этом, обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv. \quad (2.6)$$

Достаточным условием существования преобразования Фурье функции  $f(x, y)$  является, например, требование о ее кусочной гладкости и абсолютной интегрируемости.

При этом преобразование Фурье обладает свойством сепарабельности:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi ux} dx \right] e^{-i2\pi vy} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u, y) e^{-i2\pi vy} dy, \end{aligned}$$

где

$$F(u, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi ux} dx.$$

В общем случае, преобразование Фурье является комплексной функцией

$$F(u, v) \equiv R(u, v) + iI(u, v) \equiv |F(u, v)| e^{i\phi(u, v)},$$

с действительной частью  $R(u, v)$  и комплексной частью  $I(u, v)$ . Обычно используется следующая терминология:

$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$  — Фурье-спектр, или модуль пре-

бразования Фурье, или амплитуда;

$\phi(u, v) = \arctg [I(u, v)/R(u, v)]$  — фазовый спектр, или фаза преобразования Фурье;

$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$  — спектр мощности.

Как и в одномерном случае, при визуализации преобразования Фурье обычно используется Фурье-спектр.

На рис. 2.3 приведен двухмерный аналог примера рис. 2.1:

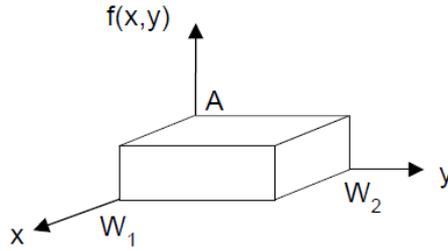


Рис. 2.3: Индикаторная функция  $f(x, y)$  области  $[0, W_1] \times [0, W_2]$  амплитуды  $A$ .

Вычисление преобразования Фурье этой функции дает

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy = A \int_0^{W_1} e^{-i2\pi ux} dx \int_0^{W_2} e^{-i2\pi vy} dy = \\ &= AW_1W_2 \operatorname{sinc}(uW_1) \operatorname{sinc}(vW_2) e^{-i\pi(uW_1+vW_2)}. \end{aligned}$$

Фурье-спектр  $|F(u, v)| = AW_1W_2 |\operatorname{sinc}(uW_1)| |\operatorname{sinc}(vW_2)|$ .

Рис. 2.4 - 2.6 иллюстрируют изображение, его Фурье-спектр и  $|F(u, v)|_{\text{cent}}$  — центральное горизонтальное сечение изображения  $|F(u, v)|$ .

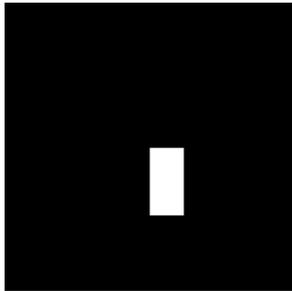


Рис. 2.4:  $f(x, y)$

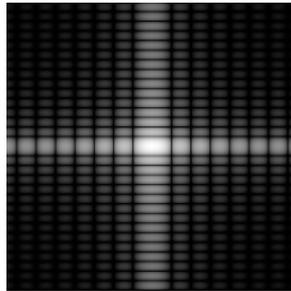


Рис. 2.5:  $|F(u, v)|$

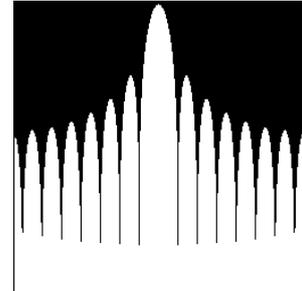


Рис. 2.6:  $|F(u, v)|_{\text{cent}}$

### 2.2.1 Визуализация преобразования Фурье изображений

При визуализации непрерывных изображений в градациях серого, соответствующих восьмибитным дискретным изображениям  $B = 8$ , используется область значений интенсивности от 0 (черный цвет) до  $L = 255$  (белый цвет). Значение  $L$ , соответственно, равно  $L = 2^{(B-1)}$  для случая  $B$ -битных дискретных изображений. Для перевода получаемых значений  $r = f(x, y) \in [0, f_{max}]$  в интервал  $[0, L]$  обычно используется линейная нормировка  $s = r * L / f_{max}$ .

Отметим, что линейная нормировка функции  $|F(u, v)|$  не позволяет хорошо ее визуализировать. Практически будет видна только яркая белая точка в центре рисунка при  $u = 0, v = 0$ . В этом случае используется логарифмическая шкала  $s = c \log(1 + |r|)$ . Такая шкала и использована для рисунка 2.5. На рис. 2.7, 2.8 и 2.9 приведен пример изображения и его Фурье-спектров при линейной и логарифмической нормировках.

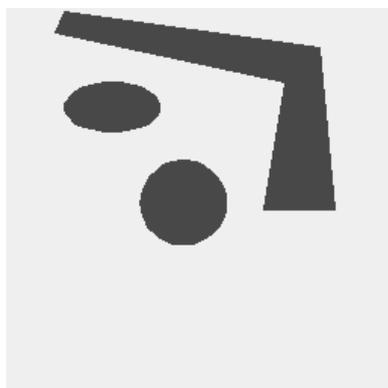


Рис. 2.7:  $f(x, y)$

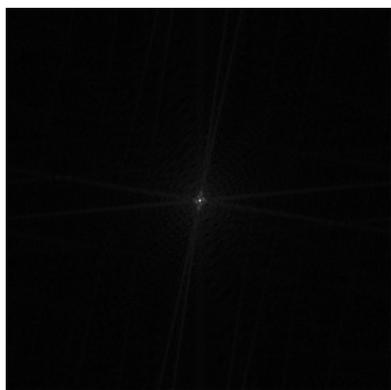


Рис. 2.8:  $|F(u, v)|$  при линейной нормировке

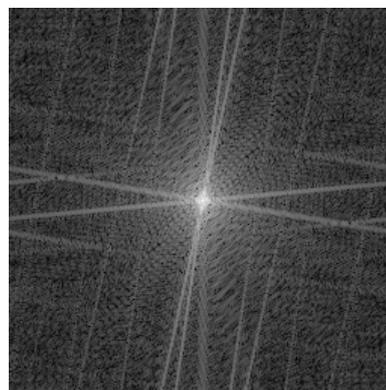


Рис. 2.9:  $|F(u, v)|$  при логарифмической нормировке

Выбор величины  $c$  осуществляется автоматически. Пусть, например, значения функции Фурье-спектра лежат в интервале  $[0, 2.5 \times 10^6]$ . Соответствующие значения  $\log(1 + |r|)$  меняются от 0 до 6.4, и для перевода значений Фурье-спектра в интервал  $[0, 255]$  значение  $c = 255/6.4$ .

На рис. 2.10, 2.11 приведены примеры Фурье-спектров изображений (левый столбец — изображения, правый — их Фурье-спектры):

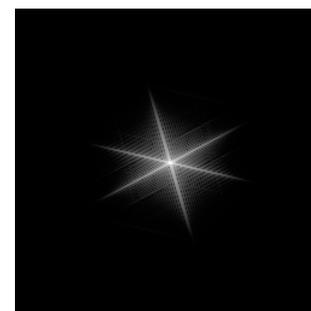
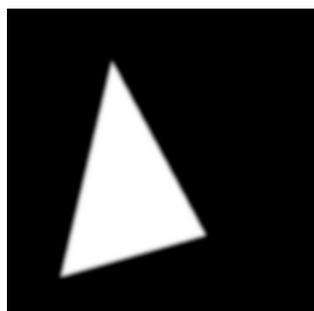
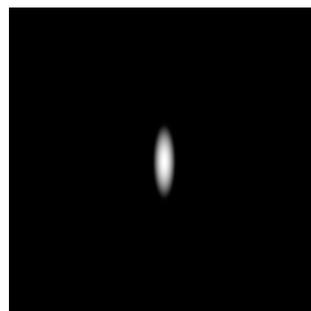
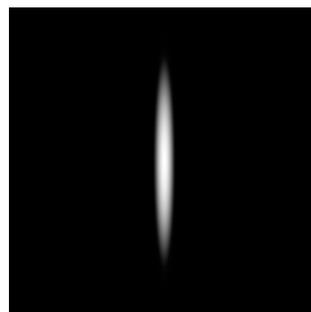


Рис. 2.10: Изображения  $f(x, y)$

Рис. 2.11: Их Фурье-спектры  $|F(u, v)|$

### 2.2.2 Преобразование Фурье производных функции

Все свойства, приведенные в таблице 2.1, достаточно просто переносятся на двухмерный случай. В то же время, еще раз отметим свойство двумерного преобразования Фурье производной функции, позволяющее построить операционное исчисление Фурье.

Обозначим оператор преобразования Фурье как  $\mathfrak{F}$ . Тогда, по формуле обращения,

$$f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} dudv.$$

Дифференцируя по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i2\pi u F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} dudv = \mathfrak{F}^{-1}\{i2\pi u F(u, v)\}.$$

Свойство двумерного преобразования Фурье производной функции иллюстрирует пример КТ-изображения, его производной и их Фурье-спектров (верхняя колонка - изображение и его производная; нижняя - их Фурье-спектры) на рис. 2.12 - 2.15.



Рис. 2.12: КТ-изображение  $f(x, y)$



Рис. 2.13: Его частная производная (сдвиг интенсивностей на 128)

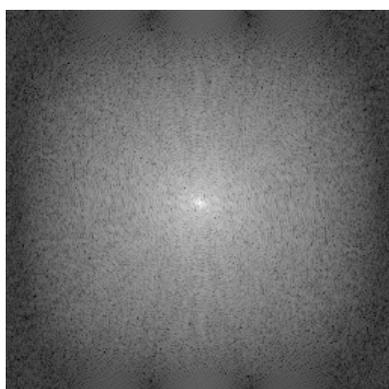


Рис. 2.14:  $|F(u, v)|$

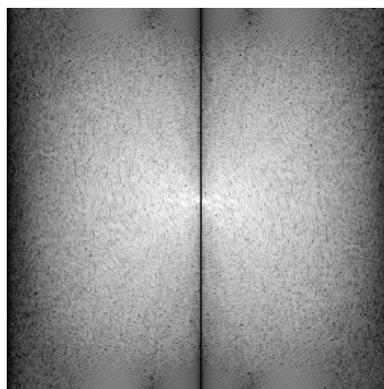


Рис. 2.15:  $|\mathfrak{F}\{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\}|$

Отметим также, что преобразование Фурье от Лапласиана имеет вид

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\right\} = 4\pi^2(u^2 + v^2)F(u, v).$$

### 2.2.3 Преобразование Фурье повернутого изображения

Часто используемым является свойство преобразования Фурье о том, что при повороте изображения  $f(x, y)$  на некоторый угол  $\theta_0$  и преобразование Фурье  $F(u, v)$  поворачивается на тот же угол.

Введем полярные координаты

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad u = \omega \cos(\phi), \quad v = \omega \sin(\phi),$$

переходя от  $f(x, y)$  и  $F(u, v)$  к  $f(r, \theta)$  и  $F(\omega, \phi)$ .

Покажем, что  $f(r, \theta + \theta_0) \iff F(\omega, \phi + \theta_0)$ .

**Доказательство.**

При переходе к полярным координатам  $dx dy = r dr d\theta$ .

$$\begin{aligned} F(\omega, \phi) &= \mathfrak{F}\{f(r, \theta)\} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r, \theta) e^{-i2\pi\omega r (\cos\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi)} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r, \theta) e^{-i2\pi\omega r \cos(\theta - \phi)} dr d\theta. \end{aligned}$$

Повернем  $f(r, \theta)$  на угол  $\theta_0$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(r, \theta + \theta_0)\} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r, \theta + \theta_0) e^{-i2\pi\omega r \cos(\theta - \phi)} dr d\theta = \\ &< \text{замена переменной } \lambda = \theta + \theta_0 > \\ &= \int_{\theta_0}^{2\pi + \theta_0} \int_0^{\infty} r f(r, \lambda) e^{-i2\pi\omega r \cos(\lambda - \theta_0 - \phi)} dr d\lambda = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r, \lambda) e^{-i2\pi\omega r \cos(\lambda - \theta_0 - \phi)} dr d\lambda.$$

Сравнивая полученный результат с  $F(\omega, \phi)$ , получаем, что

$$f(r, \theta + \theta_0) \iff F(\omega, \phi + \theta_0).$$

Пример, иллюстрирующий это свойство преобразования Фурье, приведен на рис. 2.16 - 2.19:

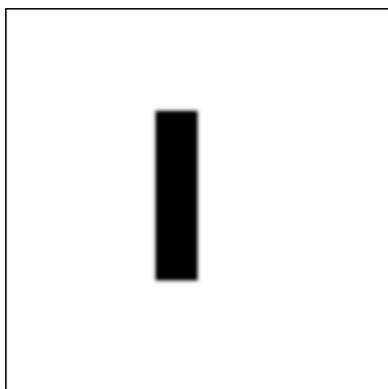


Рис. 2.16:  $f(x, y)$

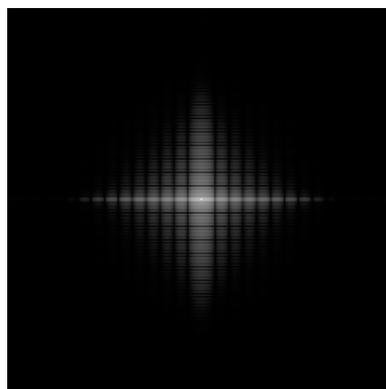


Рис. 2.17:  $|F(u, v)|$

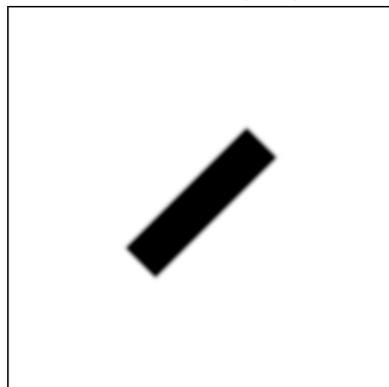


Рис. 2.18:  $f(x, y)$

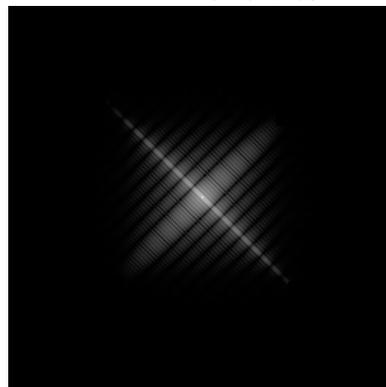


Рис. 2.19:  $|F(u, v)|$

#### 2.2.4 Важность фазы и амплитуды преобразования Фурье изображения

При визуализации преобразования Фурье изображения обычно используют его амплитуду (модуль преобразования Фурье). Амплитуда достаточно информативна — мы можем, например, оценить распределение частот в изображении. Однако, при такой визуализации мы опускаем информацию, содержащуюся в фазе преобразования Фурье. Насколько

велика эта потеря? Или, более общо: где содержится больше информации об изображении (сигнале) — в фазе или амплитуде?

Приведенный ниже пример на рис. 2.20 - 2.23 иллюстрирует ответ на наш вопрос. В общем случае, больше информации содержится в фазе сигнала!

Рис. 2.20:  $f_1(x, y)$ Рис. 2.21:  $f_2(x, y)$ Рис. 2.22:  $f_{1,2}(x, y)$ Рис. 2.23:  $f_{2,1}(x, y)$ 

Сравнение проводилось следующим образом:

1. Для изображений обезьяны ( $f_1(x, y)$ ) и Лены ( $f_2(x, y)$ ) были вычислены их преобразования Фурье

$$F_1(u, v) = |F_1(u, v)|e^{i\phi_1(u, v)}, \quad F_2(u, v) = |F_2(u, v)|e^{i\phi_2(u, v)}.$$

2. Затем мы поменяли местами фазы у этих преобразований Фурье и с помощью обратного преобразования Фурье получили изображения  $f_{1,2}(x, y)$  и  $f_{2,1}(x, y)$ :

$$f_{1,2}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{|F_1(u, v)|e^{i\phi_2(u, v)}\}, \quad f_{2,1}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{|F_2(u, v)|e^{i\phi_1(u, v)}\}.$$

Можно видеть, что в результате такой замены восстановленные изображения кажутся более похожими на то, чья фаза преобразования Фурье использовалась при реконструкции! Это справедливо практически для всех реальных изображений.

Отметим, что имеет место теорема, показывающая, что во многих случаях изображения могут, с точностью до масштабирующего множителя интенсивности, быть однозначно восстановлены только по их фазе. Аналогичной теоремы для восстановления изображения только по амплитуде его преобразования Фурье нет.

Аналогичный эксперимент проводился и для одномерных голосовых сигналов: были записаны два разных предложения, произносимых людьми разного пола. Фазу и амплитуду сигналов поменяли местами. Получившиеся предложения воспроизводились для слушателей — людей, которые смогли понять значение предложения соответствующего использованной фазе, а также определить соответствующий фазе пол говорящего. Таким образом, во многих случаях большая часть информации о сигнале переносится его фазой и в одномерном случае. Эффект от использования измененной амплитуды привел в этом примере к появлению шума, как и в случае 2D.

К сожалению, визуально получить какую-либо информацию по изображению фазы преобразования Фурье крайне затруднительно.

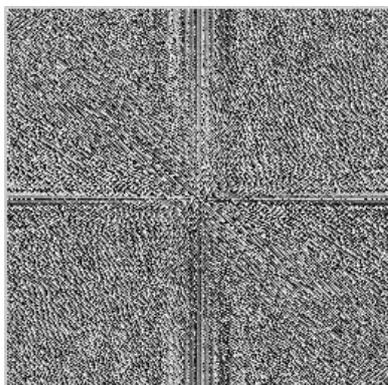


Рис. 2.24: Фаза преобразования Фурье изображения Лена

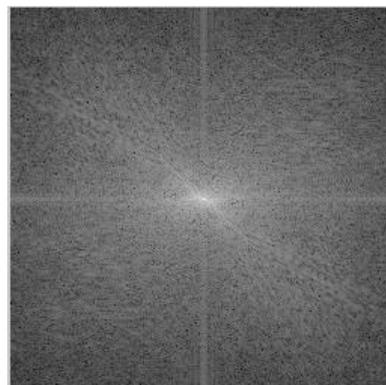


Рис. 2.25: Амплитуда преобразования Фурье изображения Лена

На рис. 2.24 и 2.25 приведены изображения фазы и амплитуды преобразования Фурье изображения Лена, которые иллюстрируют это.

Тем не менее, при построении алгоритмов обработки и анализа изображений необходимо помнить о большей информативности фазы преобразования Фурье по сравнению с амплитудой!

### 2.2.5 Метрика сравнения изображений на основе взаимной корреляционной функции

Каждый математический метод обработки или анализа изображений требует использования некоторой метрики для сравнения изображений. При этом такая метрика, по возможности, должна соответствовать особенностям человеческого восприятия изображений, например, при оценке их качества. К сожалению, разработка одной такой метрики в принципе невозможна, в том числе и в силу различия в восприятии различных людей. Тем не менее, для каждого конкретного класса задач ключевой проблемой является подбор метрики, наиболее соответствующей рассматриваемым задачам. Разработано большое число различных методов оценки различия изображений, их число постоянно увеличивается. В том числе, для сравнения изображений используются обученные сверточные нейронные сети.

Простейшей (и наиболее часто используемой) метрикой сравнения изображений является *среднеквадратичная метрика* ( $MSE$  — Mean Squared Error).

При этом расстояние между двумя непрерывными сигналами (изображениями)  $I_1$  и  $I_2$  определяется их нормой разности  $\|I_1 - I_2\|_{L_2}$ , а в дискретном случае, для изображений размера  $N \times N$ , как

$$MSE(I_1, I_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I_1(i, j) - I_2(i, j))^2.$$

Также вместо нее используют метрику  $PSNR$  (Peak Signal-to-Noise Ra-

tion), имеющую вид

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{L^2}{MSE}.$$

Здесь  $L$  — максимальное значение интенсивности пикселя изображения. Например, при 8-битном представлении шкалы градаций серого,  $L = 255$ . За исключением возможности сравнения изображений с различной битностью,  $PSNR$  преимуществ по сравнению с  $MSE$  не имеет.

Несмотря на простоту и частоту использования, среднеквадратичная метрика обладает рядом серьезных недостатков. Например, при умножении интенсивностей изображения на какую-нибудь константу, получившийся результат визуально остается очень похожим на оригинал, но имеет большое отличие от оригинала в метрике  $MSE$ .

Метрикой, не обладающей таким недостатком, является метрика сравнения изображений на основе взаимной корреляционной функции изображений. Объясним ее для случая непрерывных изображений. Пусть даны непрерывные изображения  $f$  и  $h$ . Используя неравенство Коши-Буняковского, легко показать, что для их нормированной корреляции (при записи будем опускать нижний и верхний пределы интегрирования  $-\infty$  и  $+\infty$ )

$$\frac{(f \otimes h)(x, y)}{\sqrt{\int \int f^2} \sqrt{\int \int h^2}} \begin{cases} = 1, & \text{если } f = ch, \text{ где } c - \text{константа,} \\ < 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, сравнение изображений может осуществляться на основе анализа их функции взаимной корреляции. Рассмотрим пример для дискретных изображений.

Пусть нам дан образец — дискретное изображение  $F(X, Y)$  размера  $M \times M$ , где  $M$  — нечетное. Поставим задачу поиска на изображении  $I(X, Y)$  размера  $N \times N$ ,  $N \gg M$  блока размера  $M \times M$ , наиболее похожего на образец  $F(X, Y)$ .

Будем рассматривать скользящее по  $I$  окно размера  $M \times M$ . При

нахождении центра окна в точке (пикселе)  $(X, Y)$ , точки окна находятся в области  $[X - \lfloor M/2 \rfloor, X + \lfloor M/2 \rfloor]$  и  $[Y - \lfloor M/2 \rfloor, Y + \lfloor M/2 \rfloor]$ . Здесь  $\lfloor A \rfloor$  обозначает целую часть числа  $A$ . Рис. 2.26 иллюстрирует это для случая  $M = 3$ .

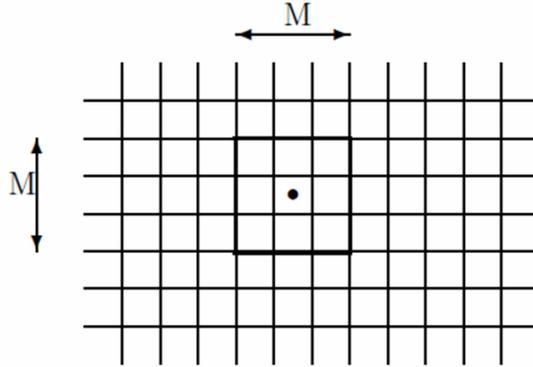


Рис. 2.26: Образец размера  $3 \times 3$ , сканирующий изображение  $I$

Для каждой точки  $(X, Y)$  изображения  $I$  мы строим изображение значений корреляции образца  $F$  и скользящего по  $I$  окна с центром  $(X, Y)$ , используя формулу

$$I'(X, Y) = \sum_{j=-\lfloor M/2 \rfloor}^{\lfloor M/2 \rfloor} \sum_{i=-\lfloor M/2 \rfloor}^{\lfloor M/2 \rfloor} F(i, j)I(X + i, Y + j).$$

Положения максимумов  $I'(X, Y)$  соответствуют центрам блоков размера  $M \times M$  изображения  $I$ , наиболее похожих на  $F$ .

Очевидные проблемы, характерные для вычисления дискретной свертки и функции взаимной корреляции, возникают в точках изображения  $I$  с координатами  $X, Y < \lfloor M/2 \rfloor$  и  $X, Y > N - \lfloor M/2 \rfloor$ . Эту проблему решают, например, одним из следующих способов:

1. вычисления проводят только в точках  $\lfloor M/2 \rfloor \leq X, Y \leq N - \lfloor M/2 \rfloor$ ;
2. продолжают изображение  $I$  за ее границы нулевым значением;
3. делают четное отражение изображения  $I$  за ее границы.

Выбранный способ (могут быть и другие способы) зависит от специфики решаемой задачи обработки изображений.

При вычислении свертки и функции взаимной корреляции двух функций, достаточно затратных по времени, очень существенна возможность проводить вычисления с использованием теоремы о свертке. Общая схема включает в себя преобразование Фурье свертки, которое переводит свертку (функцию взаимной корреляции) в произведение преобразований Фурье функций, перемножение преобразований Фурье и, как заключительный шаг, обратное преобразование Фурье, чтобы получить необходимый результат. Ключевая идея такого метода — использование алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье, что обычно позволяет существенно ускорить вычисления. В то же время, как и в вышеприведенном примере, не имеет смысла применять преобразование Фурье при малых значениях  $M$ . Так, при  $M = 3$  смысла в применении теоремы о свертке нет, а при  $M = 15$  — есть. Выбор алгоритма вычислений зависит от специфики решаемой задачи.

В заключение, упомянем также о часто используемой в настоящее время метрике — *индексе структурного сходства SSIM* (structural similarity index measure). Она решает часть проблем, присущих метрике  $MSE$ . Не приводя ее определения, отметим только, что одна из ее составляющих основана на анализе взаимной корреляции функций.

### 2.2.6 Преобразование Фурье для радиально-симметричных функций

Рассмотрим полярное представление функции  $f(x, y)$ , имеющее вид  $f(r, \theta)$ , где  $r^2 = x^2 + y^2$  и  $\text{tg } \theta = y/x$ . Двухмерная функция называется *радиально симметричной*, если

$$f(x, y) = f(r, \theta) = f(r).$$

Ряд физических систем, таких как оптические линзы, обладают радиальной симметрией. Поэтому специальный вид преобразования Фурье для этого класса функций является достаточно полезным.

Преобразование Фурье  $F(u, v)$ , в симметричной форме 2.5 запишем

в полярной системе координат как  $F(\omega_r, \phi)$  и, можно показать, что при этом преобразование принимает вид *преобразования Ганкеля*:

$$F(u, v) = \mathfrak{F}\{f(x, y)\} = \int_0^{\infty} f(r) J_0(\omega_r r) r dr = F(\omega_r),$$

где  $\omega_r^2 = u^2 + v^2$ ,  $\operatorname{tg} \phi = v/u$  и  $J_0(\cdot)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Отметим, что записанное преобразование Ганкеля является интегральным преобразованием с ядром Фурье и, соответственно, его обратное преобразование имеет вид

$$f(r) = \int_0^{\infty} F(\omega_r) J_0(\omega_r r) \omega_r d\omega_r.$$

Преобразование Фурье от радиально-симметричной функции двух переменных является функцией только одной переменной — радиальной частоты  $\omega_r$  и не зависит от угловой частоты  $\phi$ .

Отметим также, что если  $f(x, y) = f(r)$  является действительной, то она автоматически является четной в силу радиальной симметрии. При этом и преобразование Фурье  $F(\omega_r)$  также действительно и четно.

## Глава 3

# Проекционный метод с использованием функций Эрмита

Выбор функций Эрмита для анализа сигналов и изображений не случаен. При исследовании и решении операторных уравнений математической физики (запишем формально такое уравнение как  $Az = u$ ) и, особенно при решении обратных задач для этих уравнений, очень большую информацию, соответствующую физике изучаемых явлений, содержат собственные функции оператора  $A$  для рассматриваемого в постановке функционального пространства (или оператора  $A^*A$  в случае несамопряженного оператора). Это и обуславливает использование функций Эрмита – собственных функций преобразования Фурье из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(\mathbb{R})$  в методах обработки и анализа сигналов, во многих случаях основанных на использовании аппарата преобразования Фурье. Более того, само определение преобразования Фурье из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(\mathbb{R})$  в классических книгах Норберта Винера и Эдварда Титчмарша дается с использованием функций Эрмита.

### 3.1 Многочлены и функции Эрмита

Дадим сперва формальные определения:

Определение. *Многочлены Эрмита*, ортогональные на всей числовой

оси с весом  $p(x) = e^{-x^2}$ , определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n \geq 0.$$

Для  $H_n(x)$  верны равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi} n!, & \text{при } m = n, \end{cases}$$

и, соответственно, ортонормированную систему образуют многочлены

$$h_n(x) = \frac{H_n}{2^{n/2} (n!)^{1/2} \pi^{1/4}}.$$

Определение. *Ортонормированными функциями Эрмита* называются функции

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} h_n(x), \quad n \geq 0. \quad (3.1)$$

Эти функции могут быть также вычислены, используя рекуррентные соотношения

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2},$$

$$\psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2},$$

$$\psi_n(x) = x \sqrt{\frac{2}{n}} \psi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \psi_{n-2}(x).$$

На рис. 3.1 - 3.3 приведены примеры графиков ортонормированных функций Эрмита.

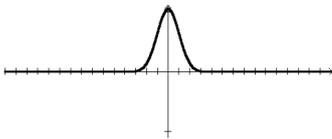


Рис. 3.1: Функция  $\psi_0$

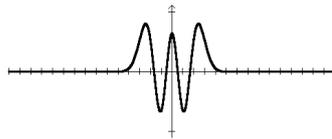


Рис. 3.2: Функция  $\psi_4$

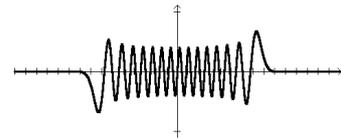


Рис. 3.3: Функция  $\psi_{29}$

Отметим, что похожесть поведения внутренних осцилляций функций Эрмита на поведение тригонометрических функций не является случайной. Асимптотически значения функций Эрмита стремятся в зависимо-

сти от четности номера к функциям  $\cos(x)$  и  $\sin(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (-1)^n \sqrt[4]{n} \psi_{2n} \left( \frac{x}{2\sqrt{n}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (-1)^n \sqrt[4]{n} \psi_{2n+1} \left( \frac{x}{2\sqrt{n}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x).$$

Двухмерные ортонормированные в  $L_2(-\infty, \infty) \times L_2(-\infty, \infty)$  функции Эрмита  $\psi_{n,m}$  определяются через одномерные функции как

$$\psi_{n,m}(x, y) = \psi_n(x)\psi_m(y).$$

Примеры графиков двухмерных ортонормированных функций Эрмита  $\psi_{n,m}$  приведены на рис. 3.4 и 3.5.

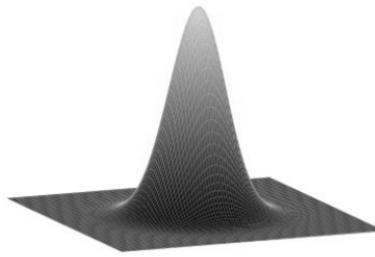


Рис. 3.4: Функция  $\psi_{0,0}$

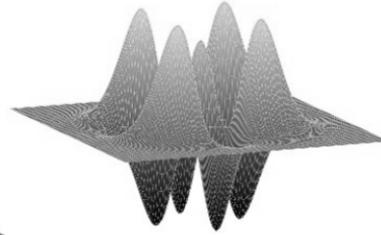


Рис. 3.5: Функция  $\psi_{2,2}$

### 3.1.1 Функции Эрмита – ортогональная система собственных функций преобразования Фурье

Перейдем теперь к более детальному изучению системы функций Эрмита. Покажем их ортогональность и покажем, что они являются собственными функциями преобразования Фурье.

Преобразование Фурье можно рассматривать как линейный ограниченный оператор  $\mathfrak{F}$ , отображающий  $L_2(\mathbb{R})$  в себя. Базис пространства из собственных функций оператора  $\mathfrak{F}$  может быть найден, если мы рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - x^2 f = \mu f. \quad (3.2)$$

Это уравнение, в предположении достаточной гладкости и абсолютной интегрируемости функции  $f$ , при применении преобразования Фурье  $\mathfrak{F}$  переводится в уравнение такого же вида. Действительно, операция  $\frac{d^2}{dx^2}$  переходит в умножение на  $-\omega^2$ , а умножение на  $-x^2$  приводит к операции  $\frac{d^2}{d\omega^2}$ . Поэтому мы будем искать собственные функции  $\mathfrak{F}$  как решения уравнения (3.2). Будем их искать в виде  $f = ue^{-x^2/2}$ , где  $u$  – многочлен.

Подставив это выражение в (3.2), получим для  $u$  уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} = (\mu + 1)u.$$

Запишем многочлен как  $u = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ .

Тогда получим равенство

$$\begin{aligned} (2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}) - 2x(a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}) = \\ = (\mu + 1)(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получаем, что

$$k(k-1)a_k - 2(k-2)a_{k-2} = (\mu + 1)a_{k-2}. \quad (3.3)$$

Так как  $a_n \neq 0$ , то  $\mu = -(2n+1)$ , и из этого следует, что  $a_{n-1} = 0$ .

Все коэффициенты многочлена  $u$  определяются из (3.3) с точностью до постоянного множителя. Если задан  $a_n$ , то мы получаем рекуррентную формулу

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-2n-4}a_k,$$

и многочлен  $u$  имеет вид:

$$u_n(x) = a_n \left( x^n - \frac{n(n-1)}{4}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 8}x^{n-4} - \dots \right).$$

Таким образом, мы имеем явный вид для системы функций  $\varphi_n(x) = u_n(x)e^{-x^2/2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , принадлежащих  $L_2(\mathbb{R})$  за счет наличия экс-

попенциального множителя.

Докажем ортогональность функций этой системы. В силу (3.2)

$$\varphi_n''(x) - x^2\varphi_n(x) = -(2n + 1)\varphi_n(x),$$

$$\varphi_m''(x) - x^2\varphi_m(x) = -(2m + 1)\varphi_m(x).$$

Умножая первое из равенств на  $\varphi_m$ , а второе на  $-\varphi_n$ , и складывая их, получаем

$$[\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n]' = 2(m - n)\varphi_n\varphi_m.$$

Если  $n \neq m$ , то интегрируя это равенство, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_m(x) dx &= \frac{1}{2(m - n)} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n]' dx = \\ &= \frac{1}{2(m - n)} [\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n]_{-\infty}^{+\infty} = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает ортогональность функций.

Покажем теперь, что функции  $\{\varphi_n\}$  являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$\mathfrak{F}\varphi_n = c_n\varphi_n. \quad (3.4)$$

Это является следствием следующих трех фактов:

1. Уравнение (3.2) инвариантно относительно преобразования Фурье  $\mathfrak{F}$ .
2. Уравнение (3.2) при каждом  $n$  имеет, с точностью до постоянного множителя, лишь одно решение вида  $P_n(x)e^{-x^2/2}$ , где  $P_n$  – многочлен степени  $n$ , построенный выше в явном виде.
3. Преобразование Фурье переводит  $x^n e^{-x^2/2}$  в  $(i \frac{d}{dx})^n e^{-x^2/2} = Q_n(x)e^{-x^2/2}$ , где  $Q_n$  – многочлен степени  $n$  (проверяется по индукции).

Из равенства (3.4) следует, что при каждом целом  $p$

$$\mathfrak{F}^p \varphi_n = c_n^p \varphi_n.$$

В случае симметрично заданного одномерного преобразования Фурье (1.3) четырехкратно примененное преобразование Фурье переводит каждую функцию в себя. Поэтому  $c_n^4 = 1$ , т.е.  $c_n$  может принимать лишь значения  $\pm 1$  и  $\pm i$ . В случае несимметричной формы записи преобразования Фурье (2.1) собственные значения равны  $\pm\sqrt{2}\pi$  и  $\pm i\sqrt{2}\pi$ .

При условии ортонормированности системы  $\{\varphi_n\}$  мы получаем систему функций  $\{\psi_n\}$  (3.1).

### 3.1.2 Поведение функций Эрмита, теорема Сони́на

**Теорема Сони́на.** Пусть функция  $u(x)$  дважды непрерывно дифференцируема на сегменте  $[a, b]$ , и удовлетворяет на этом сегменте уравнению

$$u'' + \xi(x)u = 0. \quad (3.5)$$

Если  $\xi(x)$  положительна на  $[a, b]$  и непрерывно дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , причем ее производная  $\xi'(x)$  положительна (отрицательна), то относительные максимумы функции  $|u(x)|$  убывают (возрастают) при возрастании  $x$  от  $a$  до  $b$ .

**Доказательство.**

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\nu(x) = u^2(x) + \frac{1}{\xi(x)}[u'(x)]^2.$$

В экстремальных точках функции  $u(x)$  выполняется условие

$$\nu(x) = u^2(x). \quad (3.6)$$

Учитывая уравнение (3.5), получаем равенство

$$\nu'(x) = 2u(x)u'(x) + \frac{2u'(x)u''(x)}{\xi(x)} - \frac{\xi'(x)}{\xi^2(x)}[u'(x)]^2 = -\xi'(x) \left[ \frac{u'(x)}{\xi(x)} \right]^2,$$

из которого следует, что функция  $\nu(x)$  при положительности  $\xi'(x)$  мо-

нотонно убывает при возрастании  $x$  от  $a$  до  $b$ . Но, поскольку в точках экстремума функции  $u(x)$  выполняется условие (3.6), то, следовательно, максимумы величины  $|u(x)|$  монотонно убывают на  $[a, b]$ .

Аналогично, если производная  $\xi'(x)$  отрицательна, то функция  $\nu(x)$  возрастает на  $[a, b]$ , и таким же свойством обладают относительные максимумы функции  $|u(x)|$ .

Теорема доказана.

Теорема Сонины позволяет провести анализ поведения одномерных функций Эрмита  $\varphi_n(x)$ , а также, с вычислительной точки зрения, качественно оценить область их локализации.

Действительно,  $n$ -я функция Эрмита удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2} - x^2\varphi_n(x) = -(2n+1)\varphi_n(x),$$

и  $\varphi_n = 0$  в точках  $\sqrt{2n+1}$  и  $-\sqrt{2n+1}$ . Покажем, что максимумы  $|\varphi_n(x)|$  возрастают при  $x > 0$  и убывают при  $x < 0$ . Для этого применим теорему Сонины к

$$\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2} + (2n+1-x^2)\varphi_n(x) = 0, \quad -\sqrt{2n+1} < x < \sqrt{2n+1}.$$

В данном случае  $\xi(x) = 2n+1-x^2$ . Функция  $\xi(x) > 0$  при  $-\sqrt{2n+1} < x < \sqrt{2n+1}$ . Также  $\xi'(x) < 0$  при  $0 < x < \sqrt{2n+1}$  и  $\xi'(x) > 0$  при  $0 > x > -\sqrt{2n+1}$ .

Таким образом, условия теоремы Сонины выполняются и модули экстремумов функций  $\varphi_n(x)$  возрастают при  $0 < x < \sqrt{2n+1}$  и убывают при  $0 > x > -\sqrt{2n+1}$ .

Кроме того, при  $-\sqrt{2n+1} > x$  и  $\sqrt{2n+1} < x$  функция монотонно стремится к нулю в силу отсутствия точек перегиба и экспоненциального убывания на бесконечностях. Последней левой точкой перегиба функции  $\varphi_n(x)$  является точка  $-\sqrt{2n+1}$ , а правой  $\sqrt{2n+1}$ .

Очевидно, что все эти факты относятся и к ортонормированным в

$L_2(-\infty, \infty)$  функциям  $\psi_n(x)$ .

Описанные выше свойства функций Эрмита хорошо иллюстрируются рис. 3.1 - 3.5.

### 3.2 Одномерный и двухмерный проекционные методы с использованием функций Эрмита

Под проекционным методом с использованием функций Эрмита мы понимаем использование разложения функции в ряд Фурье по функциям Эрмита. При этом применение одномерного проекционного метода к функции  $f(x)$  выражается следующей формулой:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \psi_i(x), \quad (3.7)$$

где  $\psi_i(x)$  – одномерные, ортонормированные на  $L_2(\mathbb{R})$  функции Эрмита,  $c_i$  – коэффициенты Эрмита:

$$c_i = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_i(x) dx. \quad (3.8)$$

Аналогично, в двухмерном случае

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \psi_i(x) \psi_j(y), \quad (3.9)$$

$$c_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy.$$

Рассмотрим для одномерного случая некоторые детали реализации проекционного метода с использованием функций Эрмита.

На практике мы всегда работаем с данными, заданными на конечном

отрезке, и используем вместо (3.9) конечную сумму

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi_i(x).$$

Каким образом выбирается  $N$ , определяющее число используемых при разложении функций Эрмита?

Коэффициенты  $c_i$  дают нам информацию о вкладе в аппроксимацию соответствующих функций Эрмита, и могут трактоваться как «частотные» характеристики аппроксимируемой функции. При этом вместо частотных характеристик, получаемых для тригонометрического ряда Фурье, мы переходим к «частотным» характеристикам, определяемых локализованными с вычислительной точки зрения функциями Эрмита. Соответственно, выбрав  $N$ , мы анализируем присутствие «частот» в соответствующем интервале.

Здесь мы использовали для функций Эрмита  $\psi_i(x)$  понятие «локализация с вычислительной точки зрения». Очевидно, что формально все функции Эрмита не имеют компактных носителей. Но для каждой из них, начиная с некоторого значения величины  $|x|$ , функция начинает экспоненциально убывать к нулю. Есть несколько способов определения интервала вычислительной локализации для функций Эрмита. Пусть нам дана функция  $\psi_m$ . Интервал вычислительной локализации  $[-A_m, A_m]$  для этой ортонормированной функции может быть задан, например, следующими способами (рис. 3.6 и 3.7 иллюстрируют эти способы для  $\psi_7$ ):

- Как отрезок  $[-A_m, A_m]$ , на котором норма ортонормированной на всей прямой функции  $\psi_m$  равна  $1 - \epsilon$ , где  $\epsilon$  – параметр метода, например,  $\epsilon = 0.01$ ,

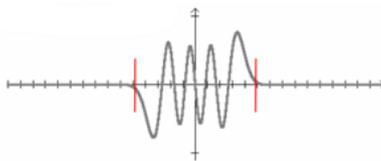


Рис. 3.6: Локализация  $\psi_7(x)$  по норме при  $\epsilon = 0.01$

- $A_m = \sqrt{2m + 1}$ , т.е. используя информацию о координате последнего перегиба функции  $\psi_m$ .

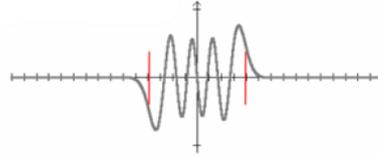


Рис. 3.7: Локализация  $\psi_7(x)$  по крайним точкам перегиба

Отметим, что если функция  $\psi_m$  вычислительно локализована на отрезке  $[-A_m, A_m]$ , то и все функции  $\psi_i$  при  $0 \leq i \leq m$  тоже вычислительно локализованы на этом отрезке, т.е. при увеличении индекса ортонормированных функций Эрмита область их локализации расширяется. При этом нормы всех этих функций близки к 1, а скалярные произведения этих функций при различных индексах близки к нулю

$$\int_{-A_m}^{A_m} \psi_i(x)\psi_j(x) dx \approx 0, \quad i, j \geq 0, \quad i \neq j.$$

Кроме того, для этих функций, в предположении, что функция  $f(x)$  имеет компактный носитель  $[-A_m, A_m]$ , интеграл в (3.8) достаточно хорошо аппроксимируется интегралом по отрезку  $[-A_m, A_m]$ :

$$c_i = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_i(x) dx \approx \int_{-A_m}^{A_m} f(x)\psi_i(x) dx, \quad i \leq m. \quad (3.10)$$

При этом, при практическом использовании коэффициентов разложения, получаемых по приближенной формуле (3.10), ошибка при значениях индекса  $i$  меньших  $m$  крайне мала, а ошибка при вычислении  $c_m$  оказывается вполне допустимой.

Основываясь на приведенных выше рассуждениях, алгоритм одномерного проекционного метода с использованием функций Эрмита для аппроксимации функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[C, D]$  выглядит следующим образом:

1. Выбирается число функций  $N + 1$ , используемое для описания функции  $f$ ;
2. Находится область локализации  $[-A_N, A_N]$  функции  $\psi_N$ ;
3. Делается линейная замена переменной, переводящая отрезок  $[C, D]$  в  $[-A_N, A_N]$  (далее, для простоты, продолжаем использовать обозначение переменной как  $x$ );
4. Проводится аппроксимация на отрезке  $[-A_N, A_N]$  функции  $f(x)$ :

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^N c_i \psi_i(x),$$

$$c_i = \int_{-A_N}^{A_N} f(x) \psi_i(x) dx, \quad i \leq N.$$

Аналогично строится алгоритм двумерного проекционного метода с использованием  $N$  функций Эрмита по оси  $x$  и  $M$  функций Эрмита по оси  $y$  на основе формулы (3.9).

### 3.3 Примеры использования проекционного метода

Функции Эрмита являются хорошей альтернативой тригонометрическим функциям в ряде задач обработки и анализа изображений. В первую очередь, это связано с вычислительной локализацией одномерных функций Эрмита, причем ширина области локализации одинакова как в пространственной, так и в частотной областях (в случае симметрично заданного одномерного преобразования Фурье (1.3)). Это свойство одномерных функций Эрмита естественно распространяется и на двумерный случай.

### 3.3.1 Предобработка данных для проекционного метода

При практическом применении проекционного метода с использованием функций Эрмита обычно предварительно осуществляют предобработку изображения, основанную на использовании базовой линии (в одномерном случае) или базовой плоскости (в 2D). Это связано с тем, что выбрав количество используемых функций Эрмита  $N+1$ , и соответствующий им отрезок локализации  $[-A_N, A_N]$ , мы получаем набор функций близких к нулю на концах отрезка локализации. В случае значений аппроксимируемой функции отличных от нуля на концах отрезка локализации, несмотря даже на малую величину среднеквадратичной ошибки аппроксимации в  $L_2[-A_N, A_N]$ , мы получаем сильные осцилляции Гиббса (ringing).

Базовая линия для функции  $f(x)$  на отрезке локализации  $[-A_N, A_N]$  определяется формулой

$$L_b(x) = f(-A_N) + \frac{f(A_N) - f(-A_N)}{2A_N}(x + A_N),$$

и проекционный метод применяется к функции  $f(x) - L_b(x)$ . Пример построения базовой линии функции на отрезке приведен на рис. 3.8.

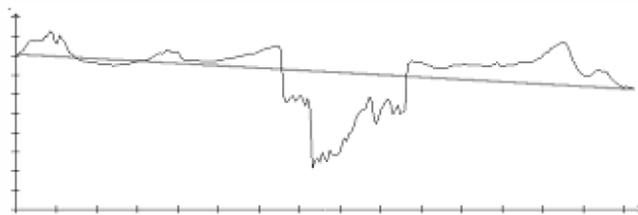


Рис. 3.8: Пример построения базовой линии функции на отрезке

В двумерном случае использование базовой линии, например, для каждой из строк изображения, оправдано с точки зрения минимизации артефактов, вызванных осцилляциями Гиббса, тогда как использование базовой плоскости более подходит для задач двумерной параметризации, где устойчивость коэффициентов кодирования имеет большую ценность, чем уменьшение количества артефактов.

Базовая плоскость для функции  $f(x, y)$  в области локализации

$G = [-A_N, A_N] \times [-A_M, A_M]$  определяется формулой

$$P_b(x, y) = ax + by + c,$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$ , и  $c$  определяются как

$$\text{Arg} \left( \min_{a,b,c} \iint_G (f(x, y) - ax - by - c)^2 dx dy \right).$$

В случае предобработки изображения с помощью базовой плоскости проекционный метод применяется к функции  $f(x, y) - P_b(x, y)$ .

### 3.3.2 Фильтрация изображений

Самое естественное применение проекционного метода с использованием функций Эрмита для изображений – частотная фильтрация. Приведем пример влияния числа функций разложения на получаемый результат аппроксимации. На рис. 3.9 - 3.13 приведены примеры частотной фильтрации с помощью проекционного метода,  $N$  – число функций Эрмита для оси  $x$ ,  $M$  – число функций Эрмита для оси  $y$ . Использованы метод локализации по последним точкам перегиба и метод предобработки с помощью базовых линий. У рисунков разностей изображений 3.11 и 3.13 произведено увеличение интенсивностей на 128.

Отметим, что на рис. 3.10 хорошо виден сильный эффект ложного оконтуривания (ringing) около контуров тигра, характерный при попытке описания высокочастотных данных слишком коротким отрезком ряда Фурье. На рис. 3.12 он уже почти не виден.

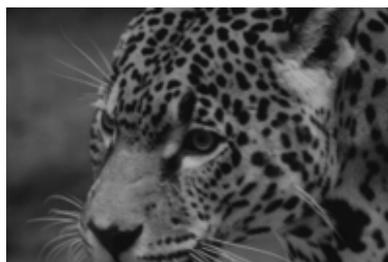


Рис. 3.9: Исходное изображение

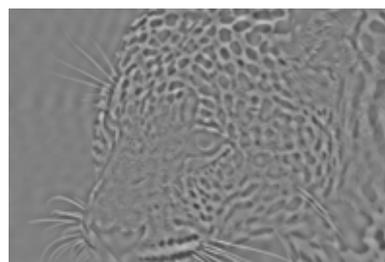
Рис. 3.10: Аппроксимация с  $N = 45, M = 30$ 

Рис. 3.11: Разность исходного и аппроксимированного изображений

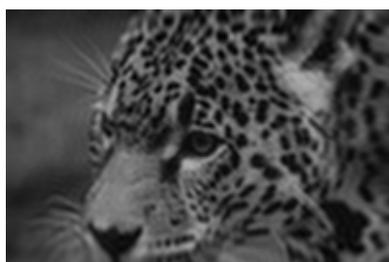
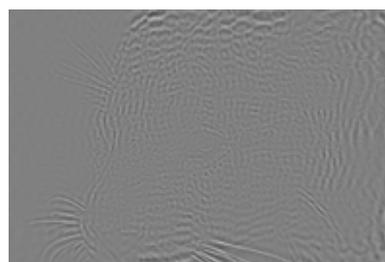
Рис. 3.12: Аппроксимация с  $N = 90, M = 60$ 

Рис. 3.13: Разность исходного и аппроксимированного изображений

Частотная фильтрация на основе проекционного метода с использованием функций Эрмита достаточно эффективна при подавлении различных высокочастотных артефактов на изображениях, например, шума.

На рис. 3.14 приведена старая фотография, ее отфильтрованный вариант показан на рис. 3.15. Соответствующие детали этих изображений показаны на рис. 3.16 и 3.17.

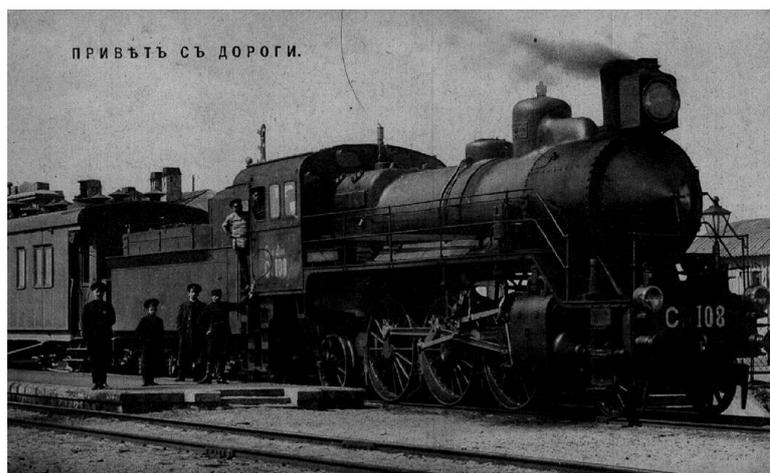


Рис. 3.14: Старая открыка с шумом



Рис. 3.15: Ее отфильтрованный вариант



Рис. 3.16: Деталь рис. 3.14



Рис. 3.17: Деталь рис. 3.15

Фильтрация проводилась с использованием метода локализации по норме при  $\epsilon = 0.01$ , что привело к достаточно сильным осцилляциям Гиббса около правой границы рис. 3.15.

### 3.3.3 Текстурный анализ изображений

Понятие *текстура* в анализе изображений не формализуется. Существует только соглашение, что текстура – это изменение данных в масштабах меньших масштабов анализируемых объектов. Например, на рис. 3.18 мы видим футболиста сборной Нигерии с мячом. Если нас интересует идентификация человека или мяча как объекта, узор на одежде или мяче считается текстурой. Если нас интересует идентификация цветка или растения на рубашке или мяче, то каждый цветок или растение узора представляет собой нетекстурированный объект в масштабе этого изображения, так как мы вряд ли сможем увидеть какие-либо детали внутри него.

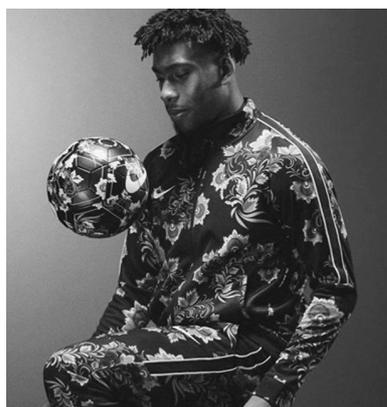


Рис. 3.18: Изображение с текстурированными объектами

В то же время для достаточно широкого класса текстур для их сравнения возможна параметризация на основе частотной информации, предоставляемой проекционным методом с использованием функций Эрмита. Это возможно, например, с помощью описанного ниже метода.

Рассмотрим для примера 2 изображения текстуры соломы, приведенные на рис. 3.19 и рис. 3.20:



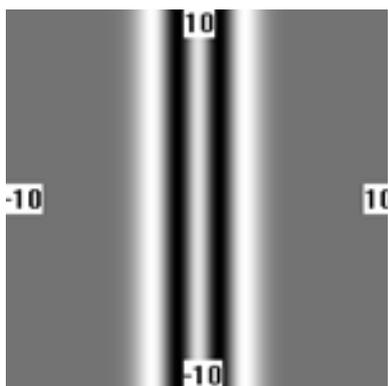
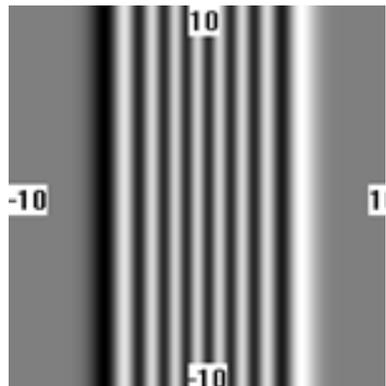
Рис. 3.19: Текстура соломы 1



Рис. 3.20: Текстура соломы 2

Совершенно очевидно, что никакие попиксельные метрики сравнения схожести изображений не дают нам возможность сравнения текстур. Соответственно, сравнение текстур должно осуществляться с использованием каких-то характеристик изображения в целом. И достаточно информативными для этого являются частотные характеристики изображений.

Рассмотрим вариант построения таких характеристик с помощью двумерных функций  $\psi_n(x, y) = \psi_n(x) \cdot 1$ , т.е., реально мы оставляем для описания только одномерные функции Эрмита. Примеры таких функций приведены на рис. 3.21 и рис. 3.22.

Рис. 3.21:  $\psi_4(x, y)$ Рис. 3.22:  $\psi_{15}(x, y)$ 

Для простоты рассмотрим случай квадратной области изображения текстур. Используем проекционный метод для каждой из строк изображения при выбранном количестве функций Эрмита  $N + 1$  и их области локализации  $[-A_N, A_N]$ . Считая при вычислениях размеры изображения

как  $2A_N \times 2A_N$  и  $(0, 0)$  центром изображения находим интегрированные коэффициенты разложения:

$$\alpha_i = \int_{-A_N}^{A_N} \int_{-A_N}^{A_N} f(x, y) \psi_i(x, y) dx dy. \quad (3.11)$$

Разобьем полученные коэффициенты по *частотным каналам*. Например для случая  $N = 63$ , мы используем разбиение на шесть каналов (3.12), при этом суммы квадратов соответствующих коэффициентов разложения дают нам значения *энергий каналов*.

$$\begin{aligned} E_1 &= (\alpha_0)^2 + (\alpha_1)^2, \\ E_2 &= (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2 + (\alpha_4)^2, \\ E_3 &= (\alpha_5)^2 + (\alpha_6)^2 + (\alpha_7)^2 + (\alpha_8)^2, \\ &\dots \\ E_6 &= (\alpha_{33})^2 + (\alpha_{34})^2 + \dots + (\alpha_{62})^2 + (\alpha_{63})^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее мы можем повторить такую же процедуру для изображений функций, повернутых на некоторые углы. Это позволяет нам определять двухмерные частотные характеристики изображения.

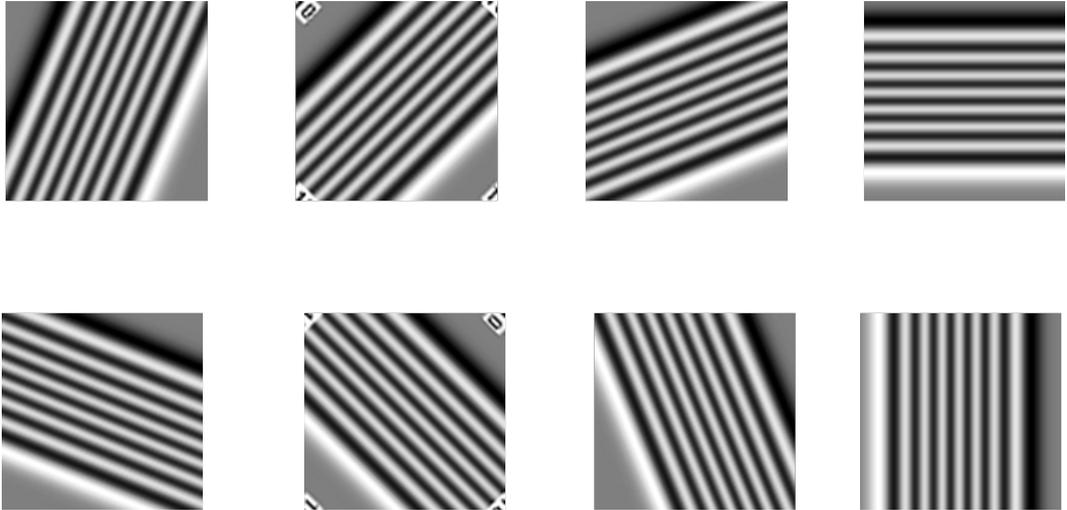


Рис. 3.23: Ориентации  $\psi_{15}$  при вычислении частотных характеристик

Например, используя повороты на  $22.5^\circ$ , мы проводим восемь вычис-

лений с набором функций  $\psi_n(x, y)$  (см. пример для  $\psi_{15}(x, y)$  на рис. 3.23), и для каждого из них мы аналогичным образом вычисляем энергии каналов (на самом деле вращаются не функции Эрмита, а аппроксимируемое изображение).

В результате вычислений мы получаем  $6 \cdot 8 = 48$  частотных характеристик для одного изображения текстуры. Как показывает практика, они информативны для сравнения текстур. Если отнормировать значения энергий для визуального представления, то информативность характеристик достаточно хорошо иллюстрирует рис. 3.24, где приведены полученные характеристики для разных текстур.

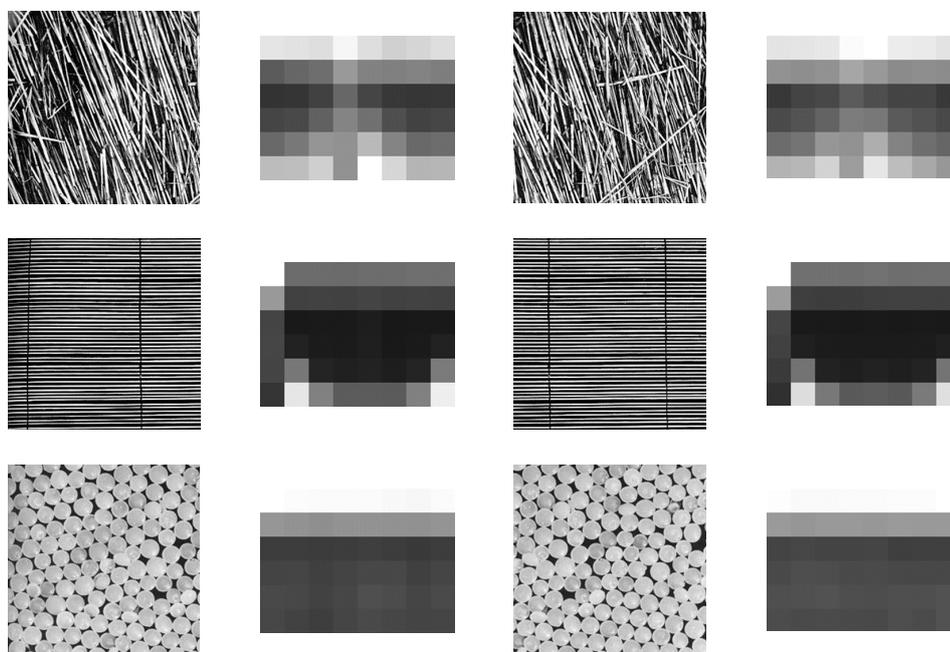


Рис. 3.24: Текстуры и визуализация их частотных характеристик

Отметим, что возможны различные варианты вычисления энергий каналов. Мы можем, например, использовать

1. *иерархический метод* – после вычисления энергии  $E_1$  вычесть из исходного изображения изображение  $\alpha_0\psi_0(x, y) + \alpha_1\psi_1(x, y)$  (размер изображения при этом определяется размером области локализации функции  $\psi_1(x)$ ) и аппроксимировать для 2-го канала информацию, вновь используя функции с индексами 0 – 5 при размере изображения соответствующем

локализации функции  $\psi_5(x)$  и аналогично вычислить значения  $E_3 - E_6$ ;

или

2. *иерархический метод без вычитания* – при нахождении энергий иерархическим методом не осуществлять вычитания аппроксимаций, полученных на предыдущих шагах.

При сравнении двух текстур на основе проекционного метода с использованием функций Эрмита, мы можем, например, использовать в качестве меры их соответствия квадратичное расстояние  $\rho$  полученных векторов длины 48 параметров первой и второй текстур. В качестве примера использования такой метрики мы можем взять задачу текстурной сегментации изображений. На рис. 3.25 приведены пример искусственно сгенерированного изображения из набора текстур, а на рис. 3.26 пример реального объекта.

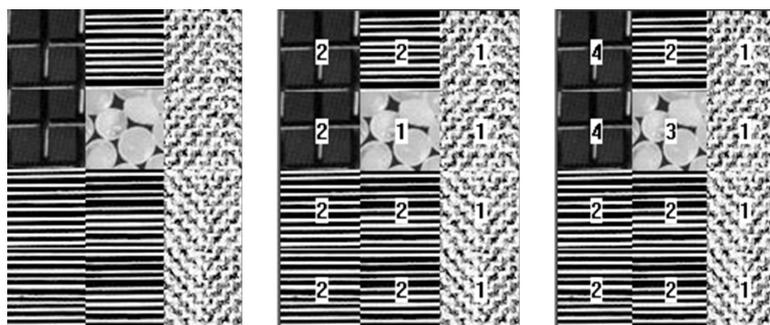


Рис. 3.25: Текстурная сегментация модельного изображения

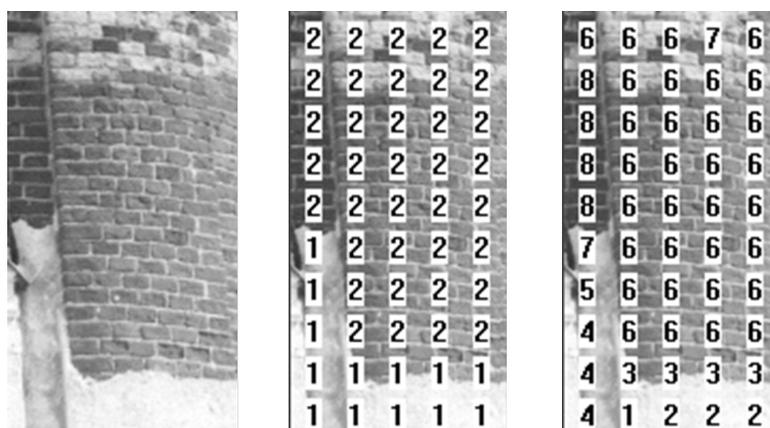


Рис. 3.26: Текстурная сегментация реального изображения

Для них проведена текстурная сегментация при условии отнесения текстур к одному классу при достаточно большом расстоянии  $\rho$  между ними, и при условии, когда требуемое расстояние взято существенно меньшим.

Отметим также, что параметризацию текстур можно проводить и используя двумерные функции Эрмита, примеры изображений которых проиллюстрированы на рис. 3.27.

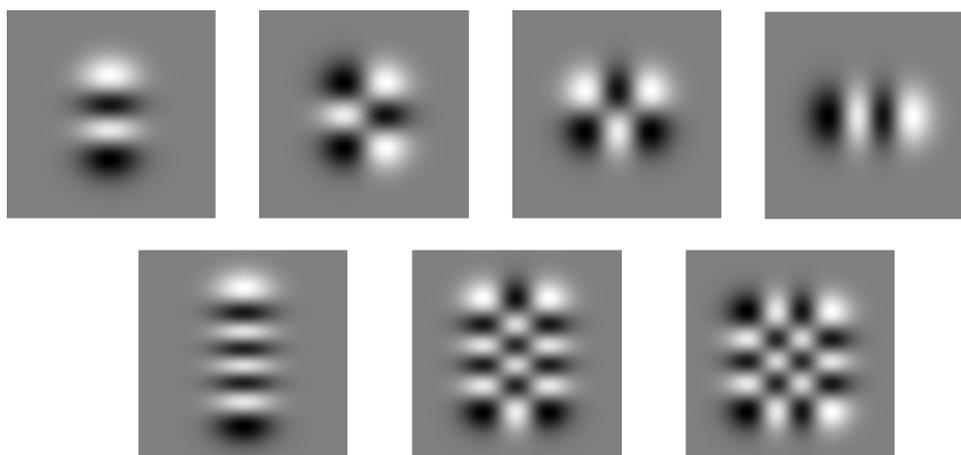


Рис. 3.27: Функции Эрмита  $\psi_{0,3}(x, y)$ ,  $\psi_{1,2}(x, y)$ ,  $\psi_{2,1}(x, y)$ ,  $\psi_{3,0}(x, y)$ ,  $\psi_{0,7}(x, y)$ ,  $\psi_{2,5}(x, y)$ ,  $\psi_{3,4}(x, y)$

### 3.3.4 Фовеация изображений

Фовеация относится к созданию и отображению сигнала, при котором разрешение изменяется в зависимости от сигнала. Область с самым высоким разрешением называется областью фовеации. Основное значение фовеации – это компрессия и принудительная фокусировка. Фовеация изображения использует тот факт, что разрешение зрительной системы человека снижается в зависимости от направления взгляда, поэтому необходимо передавать только мелкие детали в направлении взгляда. Фовеация изображения также может быть использована при исследовании зрения. Например, его можно использовать в сочетании с отслеживанием глаз для точного управления пространственной информацией, доступной через сетчатку глаза.

Свойства функций Эрмита делают их удобными для фовеационной аппроксимации изображений. Это связано с тем, что при аппроксимации в центре сигнала (изображения) вклад в разложение дают все используемые функции, в то время как на краях отрезка аппроксимации (изображения) участвуют только функции с наибольшими номерами. Отметим, что функции тригонометрического ряда Фурье таким свойством не обладают - они не имеют характерных областей вычислительной локализации, расширяющихся с увеличением номера функции.

Не уточняя деталей метода, на рис. 3.28 - 3.33 приведены примеры изображений и их различных фовеационных аппроксимаций алгоритмом на основе проекционного метода с использованием функций Эрмита.

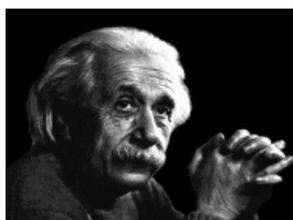


Рис. 3.28: Исходное изображение

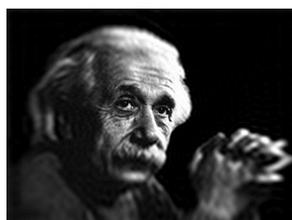


Рис. 3.29: Фовеация по центру изображения



Рис. 3.30: Более сильная фовеация



Рис. 3.31: Исходное изображение



Рис. 3.32: Фовеация по центру изображения



Рис. 3.33: Более сильная фовеация

## Глава 4

# Соотношение неопределенности и теорема Котельникова-Шеннона

### 4.1 Связь временной и частотной информации

Рассмотрим в данном разделе одномерное преобразование Фурье, где заданной во временной области функции соответствует ее преобразование Фурье – функция в частотной области. Между свойствами функции и ее преобразования Фурье имеется ряд соотношений, характеризующих их локализацию в этих областях.

#### 4.1.1 Теорема о компактных носителях

Принципиальная невозможность одновременной локализации и функции и ее преобразования Фурье следует из теоремы об их компактных носителях.

**Теорема.** Если функция  $f(x) \not\equiv 0$  имеет компактный носитель, то ее преобразование Фурье  $F(\omega)$  не может иметь компактного носителя.

**Доказательство.**

Докажем теорему от противного. Рассмотрим несимметричную форму преобразования Фурье. Пусть  $F(\omega)$  имеет компактный носитель, содер-

жащийся в отрезке  $[-A, A]$ . Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (4.1)$$

Выберем произвольный отрезок вне компактного носителя функции  $f$  и точку  $x_0$  внутри выбранного отрезка. Для нее будет выполняться:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A F(\omega) (i\omega)^n e^{i\omega x_0} d\omega = 0.$$

Учитывая, что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A F(\omega) e^{i\omega(x-x_0)} e^{i\omega x_0} d\omega,$$

разложение  $e^{i\omega(x-x_0)}$  в бесконечный ряд дает для произвольной точки прямой  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \int_{-A}^A F(\omega) (i\omega)^n e^{i\omega x_0} d\omega = 0,$$

что противоречит условию  $f(x) \not\equiv 0$ .

Таким образом, при рассмотрении совместной локализации функции и ее преобразования Фурье необходимо вводить специальные характеристики локализации функций, поскольку оценка, основанная на понятии компактного носителя, неприменима.

#### 4.1.2 Моменты функции

Одна из оценок локализации функций основана на анализе их моментов. Моменты функции связаны с поведением ее преобразования Фурье при

нулевой частоте. Так, *нулевой момент* — определенный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(0).$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x\omega} dx \Big|_{\omega=0} = F(0).$$

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = f(0).$$

Используя формулу для преобразования Фурье производных функции легко также показать, что для  $n$ -го момента справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = \frac{F^{(n)}(0)}{(-2\pi i)^n}.$$

Таким образом, моменты функции могут быть вычислены, используя значения соответствующих производных преобразования Фурье при нулевой частоте.

Для анализа локализации функций часто используются следующие характеристики, связанные с моментами функции:

- *Центроид*

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = -\frac{F'(0)}{2\pi i F(0)};$$

- *Инерция*

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)};$$

Примеры функций с маленькой и большой инерцией изображены на рис. 4.1 и 4.2.



Рис. 4.1: Функция с маленькой инерцией    Рис. 4.2: Функция с большой инерцией

Приведем также выражение для инерции свертки двух функций:

$$\langle x^2 \rangle_{f*g} = \langle x^2 \rangle_f + \langle x^2 \rangle_g + 2 \frac{F'(0)}{2\pi i F(0)} \frac{G'(0)}{2\pi i G(0)}.$$

В случае  $g(x) = \delta(x - a)$  получаем

$$\langle x^2 \rangle_{f(x-a)} = \langle x^2 \rangle_f + a^2.$$

- *Дисперсия*

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = \\ &= -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)} + \frac{(F'(0))^2}{4\pi^2 (F(0))^2}; \end{aligned} \quad (4.2)$$

Дисперсия свертки двух функций

$$\sigma_{f*g}^2 = \sigma_f^2 + \sigma_g^2.$$

Достаточно содержательной характеристикой локализации является также величина

$$W_f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}{f(0)} = \frac{F(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega} = \frac{1}{W_F},$$

называемая *шириной локализации*, однако возможность значения функ-

ции  $f(0) = 0$  сильно затрудняет ее использование.

#### 4.1.3 Соотношение неопределенности

Наиболее известным соотношением между временной и частотной локализацией функции является теорема, известная как *соотношение неопределенности*. В том числе, под названием соотношения неопределенности Гейзенберга, эта теорема широко известна и в квантовой механике, описывая неопределенность одновременного определения положения и импульса частицы.

Рассмотрим в качестве меры локализации функции  $f \in L_2(\mathbb{R})$  дисперсию функции  $f(x)f^*(x)$ , обозначим ее как  $(\Delta x)^2$  и будем соотносить её с дисперсией функции  $F(\omega)F^*(\omega)$ , обозначенной как  $(\Delta \omega)^2$ . При этом мы рассмотрим случай, когда первые моменты рассматриваемых функций равны нулю. Обобщение на общий случай ненулевых первых моментов достаточно просто.

Для доказательства нам потребуются следующие утверждения:

✓ Неравенство Коши-Буняковского в комплексной форме (здесь и далее пределы интегрирования  $-\infty$  и  $\infty$  опускаем):

$$\left[ \int (g^*(x)f(x) + g(x)f^*(x)) dx \right]^2 \leq 4 \int g(x)g^*(x) dx \int f(x)f^*(x) dx; \quad (4.3)$$

и

✓ равенство Планшереля для производных функции:

$$\int f' f'^* dx = 4\pi^2 \int \omega^2 F F^* d\omega; \quad (4.4)$$

Сформулируем теперь теорему

**Теорема (соотношение неопределенности).** Для функции  $f \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$  выполняется неравенство

$$(\Delta x)^2(\Delta \omega)^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2(\Delta \omega)^2 &= \frac{\int x^2 f f^* dx \int \omega^2 F F^* d\omega}{\int f f^* dx \int F F^* d\omega} \quad \langle \text{по определению} \rangle \\ &= \frac{\int x f x f^* dx \int f' f'^* dx}{4\pi^2 (\int f f^* dx)^2} \quad \langle \text{равенство Планшереля и (4.4)} \rangle \\ &\geq \frac{|\int x f^* f' + x f f'^* dx|^2}{16\pi^2 (\int f f^* dx)^2} \quad \langle \text{неравенство (4.3)} \rangle \\ &= \frac{|\int x d(f f^*)|^2}{16\pi^2 (\int f f^* dx)^2} \quad \langle \text{интегрирование по частям} \rangle \\ &= \frac{|\int f f^* dx|^2}{16\pi^2 (\int f f^* dx)^2} \\ &= \frac{1}{16\pi^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что неравенство Коши-Буняковского (4.3) переходит в равенство в случае, когда  $g(x) = cf(x)$ , где  $c$  — константа. Соответственно, равенство в соотношении неопределенности достигается в случае  $f'(x) = cxf(x)$ . Записав для удобства  $c = -2b$ , получаем решение дифференциального уравнения как  $f(x) = ae^{-bx^2}$ .

Отметим, однако, что приведенная нами формулировка теоремы предполагала нулевые первые моменты функции и ее преобразования Фурье. В случае ненулевых первых моментов  $u$  и  $u_F$ , сдвиги по времени и частоте приводят результат к виду  $f(x) = ae^{-b(x-u)^2} e^{iu_F x}$ .

После нормировки входящей в нее гауссовской функции, мы получаем функцию, которая называется *функцией Габора*:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{iu_F x}. \quad (4.5)$$

Коэффициент

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma},$$

получен из условия

$$N \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

Отметим, что функция Габора является комплексной, но ее преобразование Фурье — вещественная функция

$$G(\omega) = \mathfrak{F}\{g(x)\} = e^{-\frac{\sigma^2(\omega - u_F)^2}{2}}.$$

#### 4.1.4 Габоровская фильтрация

При анализе изображений у нас возникает дилемма.

С одной стороны, при вычислении свертки фильтра и обрабатываемого изображения мы хотим, чтобы полученная информация была локальной. Таким образом, мы хотим, чтобы размер фильтра был небольшим.

Но, с другой стороны, мы хотим, чтобы анализ проводился на небольшом участке в частотной области, чтобы иметь локализацию результирующего преобразования Фурье для хорошей избирательности фильтра. Т.е. мы хотим, чтобы и размер преобразования Фурье фильтра был мал (размер анализируемой частотной области определяется размером преобразования Фурье фильтра, на которое умножается преобразование Фурье изображения).

К сожалению, это невозможно. Грубо говоря, уменьшение размера области локализация функции приводит к увеличению размера области локализации ее преобразования Фурье. Мы видели это для различных вариантов формализации понятия локализации, например, в соотноше-

нии неопределенности. Поэтому функции Габора, на которых достигается нижняя оценка неопределенности, широко применяются на практике.

#### Пример Габоровского словаря фильтров

Приведем пример применения функций Габора при построении словаря фильтров. *Словарь фильтров* — это набор фильтров, используемых для анализа изображений с помощью операции свертки (функции взаимной корреляции).

В качестве иллюстрации на рис. 4.3 приведен словарь из 8 фильтров, который мы применим к изображению на рис. 4.4.



Рис. 4.3: Словарь фильтров



Рис. 4.4: Анализируемое изображение

Результаты фильтрации изображения бабочки 4.4 с помощью набора 4.3 показаны на рис. 4.5.

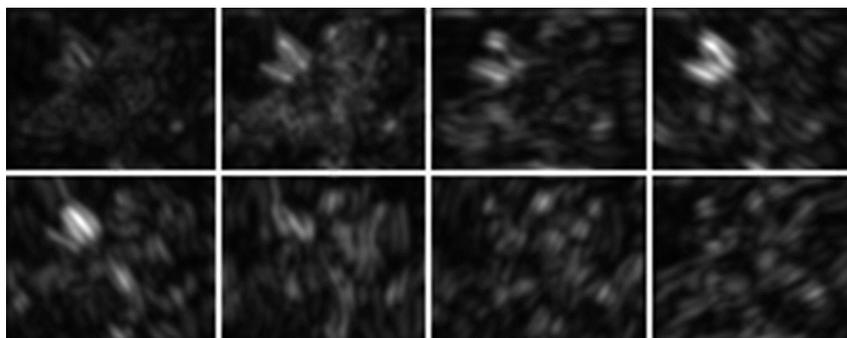


Рис. 4.5: Результаты применения словаря фильтров

Анализируя интенсивность результатов применения фильтров, можно видеть области соответствия областей изображений использованным паттернам, которые заданы изображениями словаря фильтров.

Рассмотрим как достаточно показательный пример, использование словаря из функций Габора для решения задачи детектирования перелома и трещины шейки бедра с помощью анализа текстуры на рентгеновских снимках.

Схема верхней части человеческого бедра и пример рентгеновского снимка шейки бедра приведены на рис. 4.6

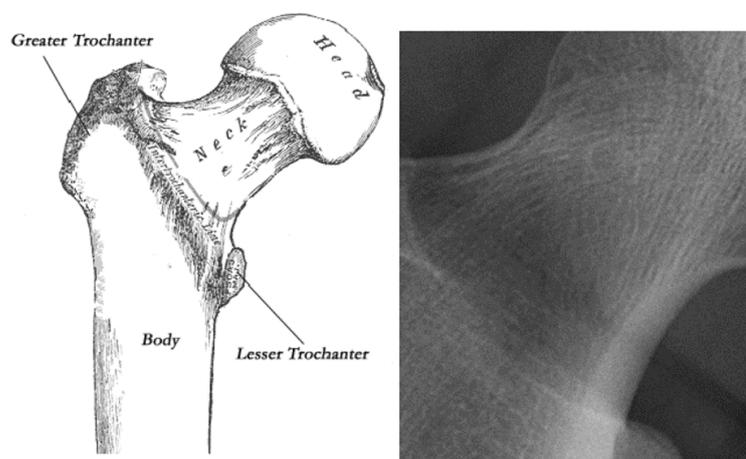


Рис. 4.6: Схема верхней части бедра и шейка бедра на рентгеновском снимке

Как видно на снимке, текстура шейки бедра имеет достаточно гладкое поле направлений. Соответственно возникает идея детектировать перелом или трещину шейки бедра, детектируя разрывы в этом поле.

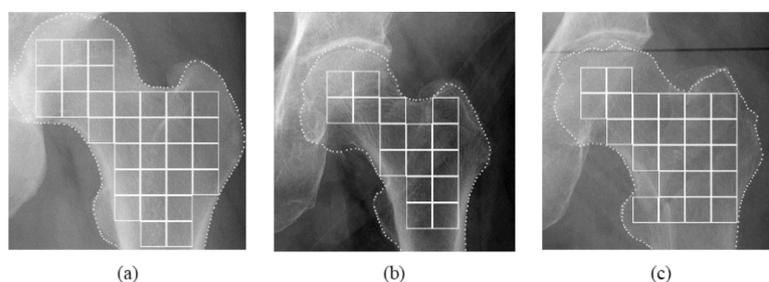


Рис. 4.7: Примеры разбиения на области для снимка шейки бедра. (a), (b) - здоровые кости, (c) - поврежденная

Для такого анализа разобьем область шейки бедра на квадратные

блоки, полностью лежащие в анализируемой области, как показано на рис. 4.7.

Для каждого из выделенных квадратных блоков мы с помощью словаря из функций Габора будем находить преимущественное направление текстуры.

Ориентированную двумерную функцию Габора запишем как

$$g(x, y) = f(x', y')e^{2\pi i \xi x'}.$$

Здесь  $f(x', y')$  — гауссовская функция

$$f(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{2\sigma^2}},$$

где  $(x', y') = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$  — повернутые координаты. Для удобства будем проводить вычисления отдельно для вещественной и комплексной частей функции Габора. Пример поведения вещественной части двумерной функции Габора приведен на рис. 4.8.

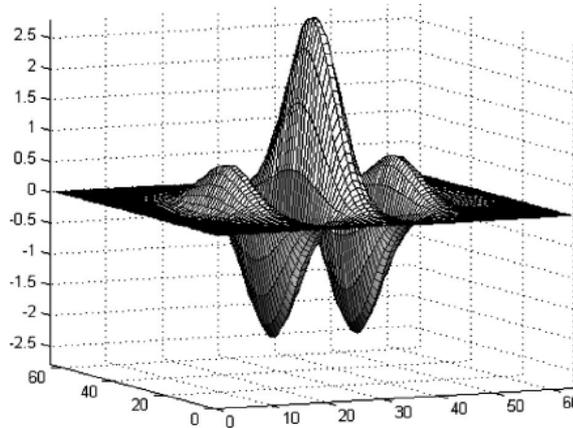


Рис. 4.8: Пример вещественной части двумерной функции Габора

Рассмотрим, таким образом, функции

$$g_{c,\xi\theta}(x, y) = f(x', y') \cos(2\pi\xi x'),$$

$$g_{s,\xi\theta}(x, y) = f(x', y') \sin(2\pi\xi x').$$

В общем случае, мы должны для анализа использовать словарь фильтров с различными комбинациями параметров ориентированной функции Габора. Однако, в данном случае была проведена предварительная оценка характерной частоты текстуры рентгенограмм шейки бедра. Для этого для набора из 30 изображений были получены амплитуды преобразования Фурье.

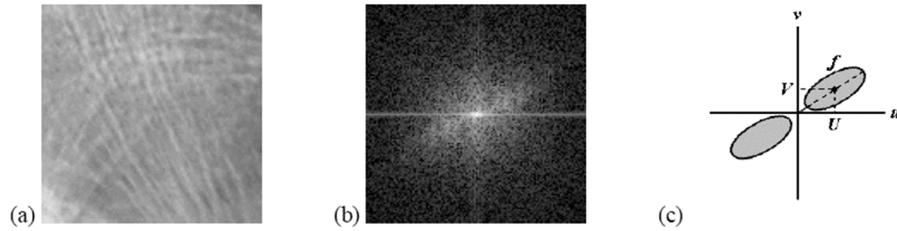


Рис. 4.9: (а) рентгенограмма, (b) - амплитуда ее преобразования Фурье, (с) - нахождение характерной частоты

Затем, исключив окрестность нулевой частоты, была проведена аппроксимация получившейся области найденных частот, как изображено на рис. 4.9. Здесь  $U$  и  $V$  — средние значения координат найденных частот, амплитуды которых выше некоторого выбранного порога. С помощью такого алгоритма была получена оценка характерной частоты  $\xi = \sqrt{U^2 + V^2} = 0.13$  цикла на пиксел.

Таким образом, для нахождения предпочтительной ориентации блоков используется словарь фильтров Габора, с частотой  $\xi = 0.13$ . Ориентации  $\theta$  рассматриваются в интервале  $0 - 157.5^\circ$  с шагом  $22.5^\circ$ .

Для нахождения предпочтительной ориентации блока, в каждом пикселе этого блока при выбранном наборе ориентаций мы вычисляем свертки

$$e_{c,\xi\theta} = I(x, y) * g_{c,\xi\theta},$$

$$e_{s,\xi\theta} = I(x, y) * g_{s,\xi\theta},$$

и находим

$$E_{\xi\theta}(x, y) = e_{c,\xi\theta}^2(x, y) + e_{s,\xi\theta}^2(x, y).$$

Предпочтительная ориентация блока вычисляется как угол из 8 ориентаций набора словаря фильтров Габора, на котором достигается максимальное значение

$$\hat{E}_{\xi\theta} = \frac{1}{S_x S_y} \sum_{x=1}^{S_x} \sum_{y=1}^{S_y} E_{\xi\theta}(x, y),$$

где  $S_x$  и  $S_y$  — горизонтальный и вертикальный размеры блока.

Примеры получившихся полей направлений для здоровых и поврежденных шеек бедра, соответственно, приведены на рис. 4.10 и рис. 4.11.

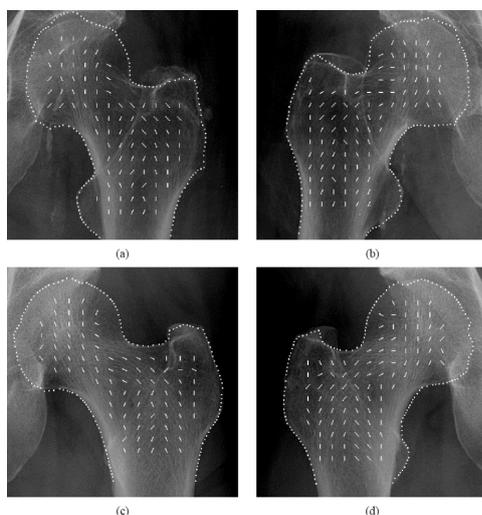


Рис. 4.10: Поля направлений для здоровых шеек бедра

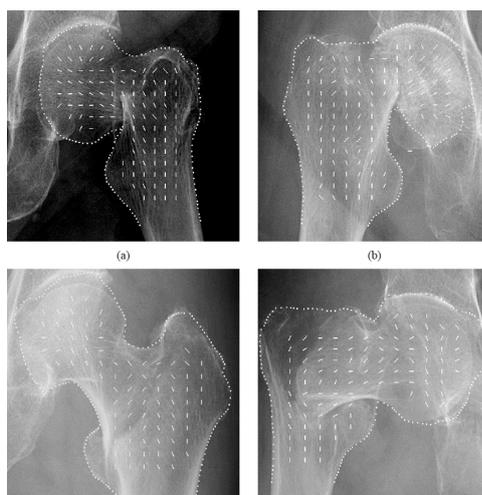


Рис. 4.11: Поля направлений для поврежденных шеек бедра

Получившиеся изображения и сами достаточно информативны, но

обычно их используют как исходную информацию для дальнейшего принятия решения о целостности шейки бедра с помощью методов машинного обучения.

### Словарь Габоровских вейвлетов

Рассмотрим теперь словарь из Габоровских вейвлетов.

Запишем двухмерную функцию Габора в виде

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) + 2\pi i W x \right]. \quad (4.6)$$

Преобразование Фурье функции (4.6) является вещественной функцией

$$G(u, v) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(u - W)^2}{\sigma_u^2} + \frac{v^2}{\sigma_v^2} \right] \right\}, \quad (4.7)$$

где  $\sigma_u = 1/(2\pi\sigma_x)$  и  $\sigma_v = 1/(2\pi\sigma_y)$ .

Габоровские вейвлеты задаются как

$$\begin{aligned} g_{mn}(x, y) &= a^{-m} g(x', y'), \quad a > 1, \quad m, n - \text{целые,} \\ x' &= a^{-m} (x \cos \theta + y \sin \theta), \\ y' &= a^{-m} (-x \sin \theta + y \cos \theta), \\ \theta &= n\pi/K, \text{ где } K - \text{число ориентаций.} \end{aligned}$$

Фильтрация изображения  $I(x, y)$  с помощью вейвлета с индексами  $m, n$  осуществляется на основе вычисления

$$Z_{mn}(x, y) = \int I(x, y) g_{mn}^*(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1.$$

Обычно используют набор вейвлетов Габора, у которого соответствующий набор преобразований Фурье  $G_{mn}(u, v)$  «плотно покрывает» частотную область. Пример такого набора приведен на рис. 4.12. Эллипсы вейвлетов в частотной области соответствуют половинам пика амплитуды

ды гауссовских функций.

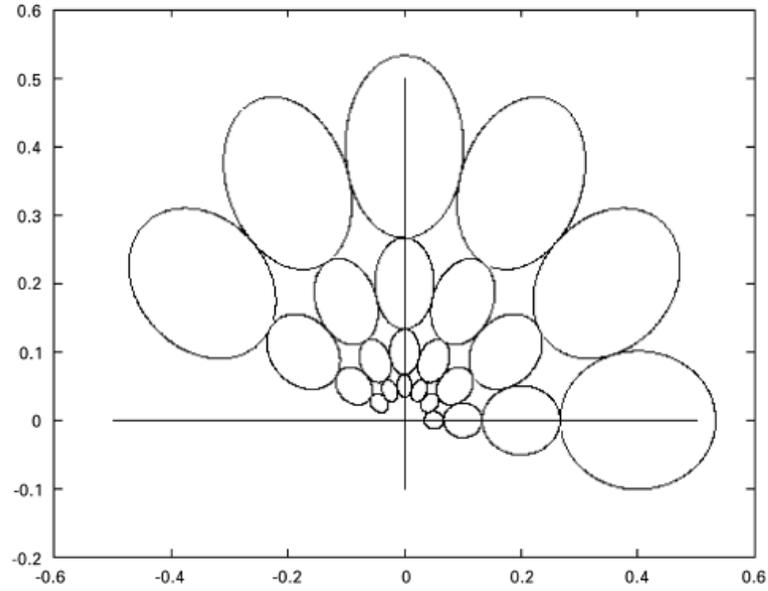


Рис. 4.12: Контуры фильтров в частотной области соответствуют половинам пика амплитуды откликов фильтра в вейвлетном словаре фильтров Габора. Использованы параметры  $U_h = 0.04$ ,  $U_1 = 0.05$ ,  $K = 6$  и  $S = 4$

Приведенное на рис. 4.12 «плотное заполнение» фильтрами частотной области соответствует следующему выбору параметров системы Габоровских вейвлетов:

$$a = (U_h/U_1)^{1/(S-1)}, \quad \sigma_u = \frac{(a-1)U_h}{(a+1)\sqrt{2\ln 2}},$$

$$\sigma_v = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2K} \right) \left[ U_h - 2 \ln 2 \left( \frac{\sigma_u^2}{U_h} \right) \right] \left[ 2 \ln 2 - \frac{(2 \ln 2)^2 \sigma_u^2}{U_h^2} \right]^{-1/2},$$

$W = U_h$  и  $m = 0, 1, \dots, S - 1$ .

Вид заполнения частотной плоскости можно варьировать, меняя параметры системы вейвлетов.

Отметим, что в случае использования системы Габоровских вейвлетов особенно ярко проявляется смысл проблемы совместной локализации фильтров и их преобразований Фурье: локализация задается обратно-пропорциональными величинами дисперсий, и мы должны находить компромисс между локализацией вейвлета (размер области анализа для ин-

формации о пикселе в пространственной области) и локализацией его преобразования Фурье (точность анализа по частоте).

## 4.2 Теорема Котельникова-Шеннона

В этом разделе мы рассмотрим задачу интерполяции сигнала после его дискретизации.

Определение. Представление непрерывного (аналогового) сигнала  $x(t)$  дискретной последовательностью  $x(t_k) = x(k\Delta t)$ , по которой с заданной точностью можно восстановить исходный непрерывный сигнал, называется *дискретизацией* на равномерной сетке.

Определение. Процесс восстановления дискретизированного сигнала называется *интерполяцией*.

Допустим, что у нас есть непрерывное изображение  $i(x, y)$ . После дискретизации мы получаем дискретное изображение  $I(x_k, y_m)$ . Затем мы интерполируем его и переходим к изображению  $i'(x, y)$ .

Естественно возникает вопрос: как нужно проводить дискретизацию, чтобы не происходила потеря информации? Т.е., когда возможно такое восстановление непрерывного изображения  $i'(x, y)$  по дискретному  $I(x_k, y_m)$ , чтобы оно совпадало с исходным изображением  $i(x, y)$ ?

Ответ на этот вопрос может быть получен из теоремы Котельникова-Шеннона (мы рассмотрим ее только в одномерном случае, но ее обобщение для больших размерностей достаточно просто).

Используем симметричную форму задания преобразования Фурье  $F(\omega)$  функции  $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi it\omega} dt$$

для всех  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Обозначим через  $A(\mathbb{R})$  множество преобразований Фурье всех функций  $f$ , принадлежащих пространству  $L_1(\mathbb{R})$ .

**Теорема.** Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$  или  $f \in L_2(\mathbb{R})$ . Предположим, что даны константы  $T, \Omega > 0$  такие, что

$$F(\omega) \text{ равна } 0 \text{ вне сегмента } [-\Omega, \Omega], \quad (4.8)$$

и

$$0 < 2T\Omega \leq 1. \quad (4.9)$$

Тогда

$$f(t) = 2T\Omega \sum f(nT) \frac{\sin[2\pi\Omega(t - nT)]}{2\pi\Omega(t - nT)}, \quad (4.10)$$

причем ряд сходится поточечно на  $\mathbb{R}$ , если  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$ , и ряд сходится равномерно, если  $f \in L_2(\mathbb{R})$ .

Таким образом, сигнал, описываемый непрерывной функцией времени  $f(t)$  со спектром с конечным носителем, полностью определяется своими значениями, отсчитанными через интервалы времени  $T = 1/(2\Omega)$ , где  $\Omega$  — ширина спектра сигнала.

**Доказательство.**

1) Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$ .

Введем функцию  $G(\omega)$

$$G(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \text{если } |\omega| < \Omega, \\ 0, & \text{если } |\omega| \leq \frac{1}{2T}. \end{cases}$$

Продолжим ее периодически с периодом  $1/T$  на  $\mathbb{R}$ . Тогда мы можем разложить  $G(\omega)$  в ряд Фурье, имеющий вид

$$G(\omega) = \sum c_n e^{-\pi i n \omega (2T)},$$

где

$$c_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} G(\omega) e^{\pi i n \omega (2T)} d\omega.$$

Из определения функции  $G(\omega)$  и из формулы обращения

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{2\pi i t \omega} d\omega,$$

следует, что  $c_n = T f(nT)$ .

Доказательство теоремы основывается на следующих преобразованиях:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{2\pi i t \omega} d\omega <\text{по формуле обращения}> \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega) e^{2\pi i t \omega} d\omega <\text{по определению функции } G(\omega)> \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum c_n e^{-2\pi i n T \omega} e^{2\pi i t \omega} d\omega <\text{подставили выражение для} \\ &\quad \text{ряда Фурье функции } G(\omega)> \\ &= \sum c_n \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i (t-nT)\omega} d\omega <\text{ряды Фурье интегрируемых} \\ &\quad \text{функций можно интегрировать почленно}> \\ &= \sum c_n \frac{\sin[2\pi\Omega(t-nT)]}{\pi(t-nT)} <\text{получаем интегрированием}> \\ &= 2T\Omega \sum f(nT) \frac{\sin[2\pi\Omega(t-nT)]}{2\pi\Omega(t-nT)} <\text{т.к. } c_n = T f(nT); \\ &\quad \text{умножили и поделили на } 2\Omega>, \end{aligned}$$

ч.т.д.

2) Пусть  $f \in L_2(\mathbb{R})$ . В пространстве  $L_2$  теорема доказывается аналогично. Так же вводим функцию  $G(\omega)$ , периодически продолжаем ее на  $\mathbb{R}$  и раскладываем в ряд Фурье.

Заметим, что по определению преобразования Фурье в  $L_2$

$$\|f(t) - \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega)e^{2\pi i t \omega} d\omega\|_{L_2} = 0. \quad (4.11)$$

Пусть  $S_n(\omega)$  —  $n$ -я частичная сумма ряда Фурье функции  $G(\omega)$ . Введем функцию

$$\chi_{\Omega}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-\Omega, \Omega], \\ 0, & \omega \notin [-\Omega, \Omega], \end{cases}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega)e^{2\pi i t \omega} d\omega - \int_{-\Omega}^{\Omega} S_n(\omega)e^{2\pi i t \omega} d\omega \right\|_{L_2} \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\Omega}(\omega)(G(\omega) - S_n(\omega))e^{2\pi i t \omega} d\omega \right\|_{L_2} \quad \langle \text{по определению } \chi_{\Omega}(\omega) \rangle \\ &= \|\chi_{\Omega}(\omega)(G(\omega) - S_n(\omega))\|_{L_2} \\ & \quad \langle \text{по теореме Планшереля } \|f(t)\|_{L_2} = \|F(\omega)\|_{L_2} \rangle \\ &= \|(G(\omega) - S_n(\omega))\|_{L_2[-\Omega, \Omega]}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Так как  $S_n$  —  $n$ -я частичная сумма ряда Фурье  $G$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G(\omega) - S_n(\omega)\|_{L_2[-\Omega, \Omega]} \longrightarrow 0.$$

Используя это соотношение, (4.11) и (4.12), а также неравенство Гельдера и определение коэффициентов  $c_n$ , получаем требуемое в теореме равенство.

Теорема доказана.

## Замечания к теореме Котельникова-Шеннона

Замечание 1. Основой доказательств теоремы в пространствах  $L_1(\mathbb{R})$  и  $L_2(\mathbb{R})$  является возможность перехода от преобразования Фурье к рядам Фурье.

Замечание 2. Исследуем вопрос о том, можно ли ослабить условие (4.9) теоремы.

Приведенный ниже пример показывает, что этого сделать нельзя. Допустим, константы  $T, \Omega > 0$  удовлетворяют неравенству  $2T\Omega > 1$ . Возьмем функцию

$$f(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}} \in L_2(\mathbb{R}).$$

Ясно, что преобразование Фурье этой функции  $F(\omega) = T\chi_{(\frac{1}{2T})}(\omega)$ . Следовательно, условие (4.8) выполнено. Так как

$$f(nT) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 0, \\ 1, & \text{если } n = 0, \end{cases}$$

то правая часть формулы (4.10)

$$g(t) = 2T\Omega \frac{\sin 2\pi\Omega t}{2\pi\Omega t}.$$

Функции  $f$  и  $g$  не равны, так как обе непрерывны на  $\mathbb{R}$  и  $f(0) = 1$ , а  $g(0) = 2T\Omega > 1$ . Т.е. правая часть не равна левой части, что противоречит условию. Следовательно, предположение о том, что  $2T\Omega > 1$  не является верным.

Замечание 3. В формуле (4.10) константу  $T$  обычно называют периодом дискретизации, последовательность  $\{f(nT) : n \in \mathbb{Z}\}$  — последовательностью дискретизированных значений. Частота  $2\Omega$  называется частотой Найквиста или частотой дискретизации. Это минимальная частота, с которой нужно посылать импульсы, чтобы не было потери информации о сигнале. Величина  $T = 1/(2\Omega)$  — максимальный период дискретизации, т.е. максимальный приемлемый промежуток времени между передаваемыми

мыми импульсами.

Замечание 4. На практике восстановленная по формуле (4.10) функция  $f_o(t)$ , как правило, не совпадает точно с передаваемой функцией  $f(t)$ . Ошибка обусловлена, например, тем, что спектр передаваемой функции  $f(t)$  обычно ограничен не резко. Это вытекает хотя бы из того факта, что все реальные сигналы ограничены во времени. Можно показать, что из этой ограниченности по времени следует, что эти сигналы не имеют строго ограниченных спектров. Выбор интервалов отсчетов  $T > 0$  означает, что все спектральные составляющие спектра с частотами  $\omega > \Omega_{\max} = 1/T$  не передаются. Таким образом, если  $2T\Omega > 1$ , то исходная функция не может быть восстановлена. Возникающий при этом эффект называется *алиасингом* — aliasing (переводится также как *наложение*).

## Глава 5

# Классические методы повышения разрешения изображений

Задача интерполяции (повышения разрешения) изображений является важной для широкого класса практических приложений, таких как обработка и анализ медицинских изображений, обработка аэрокосмических снимков, обработка данных видеонаблюдения, трансляция видеопотока низкого разрешения на современных широкоформатных дисплеях и ряда других задач.

Рост производительности компьютеров в настоящее время позволяет в реальном времени использовать сложные итерационные методы повышения разрешения изображений, а также решать задачу *многокадрового суперразрешения*. Суперразрешение позволяет сразу по нескольким различным изображениям низкого разрешения одного и того же объекта построить одно изображение высокого разрешения. Это позволяет достичь большего качества по сравнению с применением повышения разрешения каждого из изображений низкого разрешения по отдельности.

Задача повышения разрешения изображений обладает особенностями, не позволяющими эффективно применять общие методы интерполяции функций для её решения, поэтому для повышения разрешения изображений требуется разработка специальных методов. Среди таких особенностей можно выделить следующие:

1. Наличие специфичной априорной информации о содержании и струк-

туре изображения. Примером является информация о спектре непрерывного изображения: если изображение удовлетворяет условиям теоремы Котельникова, то возможно его однозначное восстановление по дискретному изображению низкого разрешения. Другими примерами являются предположения о сохранении полной вариации изображения при повышении разрешения и предположения о структуре контуров объектов.

Для различных классов изображений эта априорная информация различается, поэтому невозможно разработать универсальный метод повышения разрешения изображений для произвольных изображений.

2. Значимость субъективной оценки результата повышения разрешения. Например, в случае отображения видеопотока низкого разрешения на экранах высокой четкости, визуальное качество изображений имеет решающее значение. При этом имеет значение как отсутствие артефактов, так и правдоподобность получаемого результата: отсутствие искажений, таких как исчезновение мелких деталей или появление новых деталей.

Наиболее распространёнными артефактами, возникающими при повышении разрешения изображений, являются артефакты, связанные с искажением высокочастотной информации, иллюстрация которых дана на рис.5.1 : *эффект размытия, алиасинг и осцилляции Гиббса*.



Рис. 5.1: Примеры артефактов, возникающих при повышении разрешения изображений

В задачах обработки изображений осцилляции Гиббса проявляются как эффект *ложного оконтуривания*, возникающий при недостатке ин-

формации о высоких частотах изображения и проявляющийся в виде ореолов возле резких контуров. В отличие от настоящих осцилляций Гиббса, в случае ложного оконтуривания наблюдается обычно только одна или две осцилляции.

Для подавления артефактов, внесённых методами повышения разрешения изображений, применяются методы постобработки.

3. В большинстве случаев требуется не построение непрерывного изображения, а переход с более грубой сетки на более мелкую. Такой процесс называют *ресамплингом изображений*, а коэффициент отношения шага крупной сетки к коэффициенту шага мелкой сетки — *коэффициентом увеличения изображений*.

4. Важна вычислительная сложность алгоритмов повышения разрешения изображений и возможность их распараллеливания при применении в режиме реального времени.

Объективный анализ качества методов интерполяции изображений осуществляется с использованием специальных метрик, учитывающих как близость результата повышения разрешения к эталонному изображению, так и субъективную оценку качества изображения.

Большинство алгоритмов повышения разрешения изображения работают с изображениями, содержащими только одну компоненту. Применение таких алгоритмов к цветным изображениям заключается в представлении цветного изображения в виде трёх однокомпонентных изображений и повышении разрешения каждого из этих изображений по отдельности. При этом часто производится переход в другое цветовое пространство, например, YUV, где первая компонента представляет собой значение интенсивности, а оставшиеся две компоненты определяют цвет. Такой подход позволяет понизить вычислительную сложность при повышении разрешения цветных изображений, применяя для повышения разрешения цветовых компонент быстрые алгоритмы. Основой этого является большая чувствительность человеческого восприятия к яркости,

чем к цвету.

Существуют алгоритмы, которые работают с компонентами интенсивности пикселя цветного изображения как с единым целым. Например, в задачах выделения контуров используется цветовой градиент, позволяющий находить контуры, которые нельзя найти используя только яркостную компоненту изображения. Однако в задачах повышения разрешения изображения такие алгоритмы не получили популярности из-за высокой сложности и отсутствия существенного повышения субъективного качества изображения.

В настоящее время алгоритмы интерполяции цветных изображений применяются, в основном, для демозаикинга — интерполяции байеровских шаблонов. В большинстве устройств получения цветных цифровых изображений используются матрицы, состоящие из различных фотоэлементов, чувствительных к свету с определенной длиной волны. Используются три типа элементов: чувствительных к красному, зеленому и синему цветам. Эти три типа элементов расположены в виде мозаики, называемой обычно байеровским шаблоном. Задача демозаикинга состоит в получении полноцветного изображения по его байеровскому шаблону.

## 5.1 Линейные методы повышения разрешения изображений

Простейшим классом методов интерполяции изображений являются линейные методы. В общем случае методы этого класса основаны на использовании непрерывной свёртки  $\delta$ -представления изображения и некоторого ядра  $K(x, y)$ , которое для дискретной функции  $u_{i,j}$  на сетке с шагами сетки  $h_x$  и  $h_y$  имеет вид

$$f(x_0, y_0) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_{i,j} K\left(\frac{x_0}{h_x} - i, \frac{y_0}{h_y} - j\right), \quad (5.1)$$

где  $f(x, y)$  — интерполированное изображение. На данном этапе не накладывается никаких ограничений на значения пикселей и размер ис-

ходного изображения. Как правило, используется ядро вида  $K(x, y) = K(x)K(y)$ . Это позволяет существенно повысить скорость работы алгоритма, так как в этом случае интерполяция разбивается на последовательную одномерную интерполяцию сначала по одной оси, затем по другой:

$$\begin{aligned} f_i(y) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_{i,j} K\left(\frac{y}{h_y} - j\right), \\ f(x, y) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_i(y) K\left(\frac{x}{h_x} - i\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

При этом на ядро  $K(t)$  накладываются следующие условия:

### 1. Условие интерполяции

$$\begin{aligned} K(0) &= 1, \\ K(n) &= 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Это условие нужно для выполнения равенства значений исходного и интерполированного изображений

$$f(ih_x, jh_y) = u_{i,j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

в узлах сетки.

### 2. Финитность ядра

$$K(t) = 0, \quad |t| > p > 0.$$

Так как вычислительная сложность метода интерполяции (5.1) пропорциональна количеству ненулевых слагаемых в сумме, то для достижения высокой скорости интерполяции выбираются ядра с небольшим  $p$ .

### 3. Условие нормировки коэффициентов

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} K(t+i) = 1, \quad 0 \leq t < 1.$$

Данное условие следует из того, что интерполяция изображения, все пиксели которого имеют одинаковое значение  $u_{i,j} = C$ , должна давать константную функцию  $f(x, y) = C$ .

К наиболее популярным линейным методам можно отнести следующие методы:

1. Метод ближайшего соседа:

$$K(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } -1/2 \leq t < 1/2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это самый быстрый метод интерполяции. В случае ресамплинга с целым коэффициентом увеличения он представляет собой простое повторение пикселей изображения. Данный метод обладает серьёзным недостатком: получаемая функция  $f(x, y)$  является разрывной, а на изображении ярко выражен эффект ступенчатости.

2. Метод интерполяции первого порядка:

$$K(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{для } -1 < t < 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В двумерном случае этот метод называют *билинейной интерполяцией*. Получаемая с помощью этого метода функция  $f(x, y)$  является непрерывной с кусочно-постоянной первой производной. Артефактами метода является эффект ступенчатости, но менее выраженный, чем в методе ближайшего соседа, и небольшой эффект размытия.

3. Метод сплайн-интерполяции третьего порядка (*бикубическая интерполяция*):

$$K(t) = \begin{cases} (a+2)|t|^3 - (a+3)|t|^2 + 1 & \text{для } |t| \leq 1, \\ a|t|^3 - 5a|t|^2 + 8a|t| - 4t & \text{для } 1 < |t| < 2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Этот метод наиболее часто применяется для повышения разрешения изображений из-за малого значения  $p$  ( $p = 2$ ) и хорошего баланса между артефактами размытия, алиасинга и оконтуривания краев.

4. «Идеальная» интерполяция, основанная на использовании теоремы Котельникова :

$$K(t) = \text{sinc } t = \frac{\sin \pi t}{\pi t}. \quad (5.4)$$

Теорема Котельникова гарантирует восстановление непрерывного сигнала по дискретному при условии, что в спектре непрерывного сигнала не было частот выше  $\frac{1}{2 \max(h_x, h_y)}$ . На практике применение этого метода затруднительно из-за того, что ядро (5.4) не является финитным ( $p = \infty$ ), а спектр естественных изображений не является ограниченным. При интерполяции изображения с помощью данного метода, на изображении высокого разрешения наблюдается ярко выраженный эффект ложного оконтуривания, причиной которого являются осцилляции Гиббса.

5. Метод Ланцоша, представляющий собой приближение идеальной интерполяции финитным ядром:

$$K_p(t) = \begin{cases} \text{sinc}(t) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{p}\right) & \text{для } |t| < p, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Параметр  $p \in \mathbb{N}$  задает размер ядра. На практике обычно используют  $p = 2$  и  $p = 3$ .

6. Метод интерполяции с использованием фильтра Гаусса:

$$K(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Данный метод интерполяции не удовлетворяет первому условию, тем не менее, он обладает рядом полезных свойств и широко используется в обработке изображений. Например, он используется для вычисления производных любых порядков в произвольных точках на изображении. Ядро фильтра не является финитным, тем не менее, оно быстро убыва-

ет при росте  $t$ , поэтому на практике обычно принимают  $K(t) = 0$  при  $|t| > t_\sigma$ , где значение  $t_\sigma$  выбирается таким образом, чтобы ошибка не превышала заданного значения. При использовании  $t_\sigma = 3\sigma$  значение ошибки существенно ниже разницы между отображаемыми градациями интенсивности современных мониторов, поэтому на практике чаще всего используют именно это значение. Для эффективного вычисления свёртки с фильтром Гаусса используется его приближение с помощью рекуррентных фильтров.

Среди класса линейных методов невозможно выбрать наилучший метод. Любой линейный метод представляет собой баланс между тремя типами артефактов: размытия, алиасинга и эффекта Гиббса (см. рис. 5.1). Подавление одного из артефактов приводит к усилению других артефактов.

## 5.2 Нелинейные методы повышения разрешения изображений

Добиться более качественных результатов можно с помощью нелинейных методов, в которых функция усреднения  $K(x, y)$  задаётся отдельно для каждого интерполируемого пикселя и, вообще говоря, зависит от значений интенсивностей пикселей интерполируемого изображения.

### 5.2.1 Интерполяция вдоль контуров

Примером нелинейных методов является класс градиентных методов. В основе градиентных алгоритмов лежит тот факт, что интерполяция вдоль краёв (контуров) деталей изображения даёт лучшие результаты, чем обычная линейная интерполяция. В целом результат, получаемый градиентными методами, получается близок к результату бикубической интерполяции, но эффект алиасинга оказывается практически полностью подавлен. Один из способов реализации такой интерполяции основан на использовании функции Гаусса с переменными радиусами по

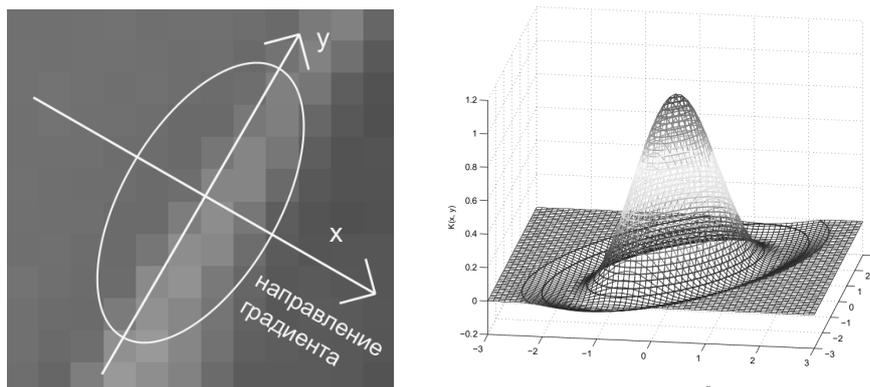


Рис. 5.2: Пример ядра  $K(x, y)$  в точке контура при интерполяции с помощью градиентных методов

разным направлениям:

$$K(x', y', x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x'^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y'^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Здесь ядро  $K(x', y', x_0, y_0)$  задано в декартовой системе координат  $Ox'y'$  с центром в интерполируемом пикселе  $O = (x_0, y_0)$  и осью  $Ox'$ , совпадающей с направлением градиента исходного изображения в  $(x_0, y_0)$ . Радиус  $\sigma_y$  фиксирован, а радиус  $\sigma_x$  выбирается на основе анализа модуля градиента изображения: чем больше модуль градиента, тем меньше значение  $\sigma_x$ . Пример ядра при интерполяции в точке границы приведен на рис. 5.2.

Еще один алгоритм, основанный на использовании градиента — это метод WADI (Warped Distance). В нем значение интерполируемого пикселя представляет собой взвешенную сумму значений четырех ближайших пикселей, причем веса выбираются в зависимости от расстояния до этих пикселей и модуля производной в этих пикселях. Чем больше производная, тем меньше весовые коэффициенты.

Алгоритм NEDI (New Edge-Directed Interpolation) увеличивает изображение в 2 раза, используя предположение о самоподобии фрагментов изображения высокого разрешения и соответствующих им фрагментов изображения низкого разрешения. Значения интерполируемых пикселей

представляют собой взвешенную сумму четырех соседних пикселей, при этом веса вычисляются в предположении, что исходное изображение было получено с теми же весами путем увеличения уменьшенного в 2 раза исходного изображения. NEDI хорошо справляется с контурами объектов (визуально лучше, чем градиентные методы), но плохо обрабатывает участки изображения, для которых предположение о самоподобии неверно.

К методу NEDI близок класс фрактальных алгоритмов, в основе которых лежит свойство самоподобия целых блоков изображения. Принцип работы алгоритмов фрактального ресамплинга аналогичен алгоритмам фрактального сжатия и основан на методах фрактального кодирования.

### 5.2.2 Регуляризирующие методы

Широкий класс методов представляет задачу повышения разрешения изображений как обратную задачу для уравнения

$$Az = u, \quad (5.6)$$

где  $u$  — исходное изображение низкого разрешения,  $z$  — искомое изображение высокого разрешения,  $A$  — оператор понижения разрешения. Таким образом, задача формулируется в виде: построить такое изображение высокого разрешения, которое после уменьшения даст известное изображение низкого разрешения.

Эта постановка задачи повышения разрешения как обратной задачи позволяет использовать для ее решения методы теории решения обратных задач. Эта теория была создана А.Н.Тихоновым. Созданный математический аппарат для использования дополнительной информации о решении оказался эффективным и в области обработки изображений.

Обратная задача, определяемая уравнением (5.6), является некорректно поставленной. Для ее решения применяются следующие методы, основанные на использовании априорной информации об изображении:

1. Регуляризирующие методы, основанные на минимизации регуляризирующего функционала.

В общем случае задаются два функционала: функционал соответствия изображения высокого разрешения изображению низкого разрешения  $\rho(z, u)$ , например, невязка

$$\rho(z, u) = \|Az - u\|_2^2,$$

и функционал соответствия изображения высокого разрешения априорной информации  $\Psi(z)$  — стабилизатор. Для нахождения изображения высокого разрешения производится минимизация регуляризирующего функционала

$$z_\alpha = \arg \min_z (\rho(z, u) + \alpha\Psi(z)),$$

где параметр регуляризации  $\alpha$  контролирует баланс между соответствием изображению низкого разрешения и априорной информацией.

Также используются следующие регуляризирующие методы

$$z_C = \arg \min_{z \in M_C} \rho(z, u), \quad M_C = \{z | \Psi(z) \leq C\}$$

и

$$z_\sigma = \arg \min_{z \in M_\sigma} \Psi(z), \quad M_\sigma = \{z | \rho(z, u) \leq \sigma\}.$$

2. Метод обратной проекции ошибки, заключающийся в итерационной минимизации невязки  $\|Az - u\|$ :

$$z_{k+1} = z_k + U(Az_k - u),$$

где  $U$  — оператор повышения разрешения изображений. Недостатком метода является отсутствие устойчивости и сходимости. Результат зависит от выбора начального приближения  $z_0$  и оператора  $U$ . Тем не менее, данный метод используется в практических приложениях, так как часто позволяет за малое количество итераций получить результат с хорошим

визуальным качеством.

3. Метод проекции на выпуклые множества, заключающийся в проектировании приближения  $z_0$  на множество изображений  $M$ , где  $M$  — выпуклый компакт :

$$z_R = pr_M z_0 = \arg \min_{z \in M} \|z - z_0\|_2^2.$$

Выбор стабилизатора обусловлен требованием сохранения структуры изображения в совокупности с существованием эффективного численного метода для минимизации регуляризирующего функционала. При построении регуляризирующих методов повышения разрешения изображений обычно рассматриваются следующие варианты выбора стабилизатора:

- 1) Квадратичный стабилизатор  $\|\Delta z\|_2^2$ ;
- 2) Функционал полной вариации;
- 3) Функционал билатеральной полной вариации, представляющий собой адаптацию функционала полной вариации для задачи повышения разрешения изображений в дискретном случае.

#### **Квадратичный стабилизатор**

Квадратичный стабилизатор являются одним из наиболее часто используемых в методах регуляризации стабилизаторов:

$$\Psi[z] = \|\Delta z\|_2^2 = \int_0^{R_x} \int_0^{R_y} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 dx dy.$$

При выборе квадратичного стабилизатора и квадратичной нормы, результату повышения разрешения изображений присущи артефакты линейных методов, а именно при больших  $\alpha$  возникает эффект размытия, а при малых  $\alpha$  появляются осцилляции Гиббса, проявляющиеся в виде ореолов возле контуров объектов.

### Функционал полной вариации

Важнейшей частью изображений являются контуры (edges). Алгоритмы повышения разрешения изображений не должны удалять либо добавлять контуры. Так, в линейных методах ресамплинга контуры теряются при размытии изображения, а новые контуры добавляются вследствие ложного оконтуривания и алиасинга. Для контроля этих артефактов можно использовать функционал полной вариации.

#### 5.2.3 Полная вариация функции

Полная вариация дифференцируемой функции  $z(x) \in \mathbb{R}^2$  определяется в виде

$$\|z\|_V = \int_0^{R_x} \int_0^{R_y} |\vec{\nabla} z(x, y)| dx dy,$$

где

$$|\vec{\nabla} z(x, y)| = \left( \left( \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Для недифференцируемых функций полная вариация вычисляется в виде

$$\|z\|_V = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{R_x} \int_0^{R_y} \left( \left( \frac{z(x+h, y) - z(x, y)}{h} \right)^2 + \left( \frac{z(x, y+h) - z(x, y)}{h} \right)^2 \right)^{1/2} dx dy.$$

В дискретном случае полная вариация определяется как

$$\|z\|_V = h \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \left( (z_{i+1, j} - z_{i, j})^2 + (z_{i, j+1} - z_{i, j})^2 \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

С вычислительной точки зрения более эффективно использовать опре-

деление полной вариации в виде

$$\|z\|_{TV} = h \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (|z_{i+1,j} - z_{i,j}| + |z_{i,j+1} - z_{i,j}|). \quad (5.8)$$

Для него справедливо

$$\|z\|_V \leq \|z\|_{TV} \leq \sqrt{2}\|z\|_V,$$

так как  $a^2 + b^2 \leq (|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ .

Важнейшим свойством полной вариации является её взаимосвязь с осцилляциями Гиббса, возникающими при действии идеального фильтра высоких частот.

Пусть  $f_\xi = f * g_\xi$ , где  $g_\xi$  — ядро идеального частотного фильтра со значениями преобразования Фурье

$$\mathfrak{F}\{g_\xi\}(w) = 1_{[-\xi, \xi]} = \begin{cases} 1, & |w| \leq \xi, \\ 0, & |w| > \xi. \end{cases}$$

Если  $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ , то  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \|f - f_\xi\|_2 = 0$ . Однако если  $\|f\|_V < +\infty$ , то  $\|f_\xi\|_V = +\infty$  для любого  $0 < \xi < \infty$ . Таким образом, для предотвращения возникновения осцилляций Гиббса можно наложить дополнительное условие на ограниченность полной вариации.

При использовании в качестве стабилизатора функционала полной вариации удобно использовать регуляризирующий метод в постановке:

$$z_C = \arg \min_{\|z\|_V \leq C} \|Az - u\|.$$

В отличие от двух других видов постановок, где регуляризирующие параметры  $\alpha$  и  $\delta$  априори неизвестны, есть возможность оценить значение  $C$  вследствие связи полной вариации с суммарной длиной линий уровня функции  $z$ .

Обозначим

$$\Theta_t = \{(x, y) \in \mathbb{R} : z(x, y) > t\}.$$

Если  $z(x, y)$  непрерывна, то граница  $\partial\Theta_t$  множества  $\Theta_t$  является линией уровня всех точек  $(x, y)$  таких, что  $z(x, y) = t$ . Пусть  $H^1(\Theta_t)$  — длина  $\partial\Theta_t$ . Справедлива теорема, что если  $\|z\|_V < +\infty$ , тогда

$$\|z\|_V = \int_{-\infty}^{+\infty} H^1(\Theta_t) dt.$$

При понижении разрешения изображений теряются мелкие детали изображения, поэтому полная вариация изображения низкого разрешения будет ниже полной вариации изображения высокого разрешения, из которого было получено изображение низкого разрешения. Однако при повышении разрешения изображений нет возможности восстановить эти детали, поэтому мы ставим условие, чтобы полная вариация изображения высокого разрешения была равна полной вариации изображения низкого разрешения:

$$C = \|u\|_V.$$

#### Функционал билатеральной полной вариации

В дискретном случае использование (5.8) в качестве полной вариации дает лишь приближенную информацию о полной вариации изображения. Для повышения точности используется функционал билатеральной полной вариации:

$$\|z\|_{BTV} = h \sum_{s,t=-p}^p \sum_{i,j} |z_{i+s,j+t} - z_{i,j}|,$$

вычисляющий взвешенную сумму разностных производных на изображении  $z$ . Параметр  $p$  ограничивает количество направлений. Чем больше значение  $p$ , тем выше точность метода, но и выше его вычислительная сложность. На практике используются значения  $p = 1$  или  $p = 2$ .